

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

DYSCYPLINA NAUKOWA MATEMATYKA/
DZIEDZINA NAUK ŚCISŁYCH I PRZYRODNICZYCH/

Rozprawa doktorska

mgr Marcin Zubilewicz

Lokalne niezmienniki unimodularne i symplektyczne tkanin

Promotor
dr hab. inż. Wojciech Domitrz

WARSZAWA 2023

Podziękowania

Dziękuję mojemu opiekunowi naukowemu oraz promotorowi *dr. hab. inż. Wojciechowi Domitrzowi* za to, że mogłem liczyć na jego uważne ucho, krytyczne oko oraz pomocną dłoń w trakcie prac nad niniejszą rozprawą i moimi pierwszymi publikacjami naukowymi, a także za jego cierpliwość i wyrozumiałość wobec moich własnych niedociągnięć i słabości. Cieszę się, że to on wprowadził mnie w świat zawodowej matematyki.

Dziękuję moim przyjaciołom i znajomym: *Karolinie, Przemkowi, Małgosi, Kasi, Kamilowi, Magdzie, Michałowi, Marcie, Ani, Arturowi, Agnieszce, Mariuszowi, Konradowi, Pawłowi, Robertowi, Weronice, Jackowi, Eli* oraz wszystkim tym, których imion nie zdołałem wymienić, a których towarzystwo było dla mnie ogromnym wsparciem w trakcie tej trudnej podróży, jaką są studia doktoranckie. Jestem im bezgranicznie wdzięczny za ciągłe przypomnianie mi swoją obecnością o tym, że moje życie nie składa się tylko z matematyki.

*Dla moich bliskich,
którzy byli ze mną nawet wtedy,
gdy sam byłem sobie odległy.*

Streszczenie

Geometria tkanin to obszerna i dobrze zbadana dziedzina matematyki. Do tej pory znalazła ona szereg rozmaitych zastosowań w wielu obszarach nauki. Jednym z nich jest fizyka matematyczna, gdzie przykładowo tzw. tkaniny Veronese stanowią ważny budulec teorii układów bihamiltonowskich. Warto tu zwrócić uwagę, że wychodząc o krok poza ramy klasycznej definicji tkaniny napotkamy w tym obszarze prawdziwe bogactwo struktur posiadających naturalne całkowalne dystrybucje styczne, takie jak *struktury bilagranżowskie*, których źródło leży w rozważaniach dotyczących kwantowania geometrycznego, czy *foliowane rozmaitości pseudoriemannowskie* utwierdzone w kanonie numerycznej ogólnej teorii względności pod postacią *formalizmu 3+1 ADM*. Strukturom tym zwyczajowo nie nadaje się nazwy „tkanina”, gdyż jest ona zarezerwowana jedynie dla tych układów foliacji, które posiadają nietrywialną różniczkowo-geometryczną strukturę lokalną. Niemniej, pomimo jej braku z punktu widzenia geometrii różniczkowej, w natywnej geometrii wybranego zagadnienia nietrywialna struktura lokalna tych obiektów staje się jawna i namacalna.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyników podstawowych badań struktury lokalnej tkanin w geometriach bogatszych niż geometria różniczkowa. Skupimy się w niej na tkaninach w geometrii unimodularnej oraz w geometrii symplektycznej, kontynuując wstępne badania S. Tabachnikova zawarte w jego pracy z 1993 roku. Zaprezentujemy szereg konstrukcji nowych niezmienników lokalnych *tkanin w obecności formy objętości*, *2-tkanin lagranżowskich* (znanych jako *struktury bilagranżowskie*) oraz *generycznych 2-tkanin symplektycznych*. Wśród opisanych niezmienników znajdują się zarówno te natury krzywiznowej, indukowane przez naturalne koneksje niezmiennicze charakterystyczne dla poszczególnych geometrii, jak i ich czysto geometryczne odpowiedniki, inspirowane klasycznym zjawiskiem *holonomii 3-tkaniny* dostrzeżonym przez W. Blaschkego i G. Bola w latach 30. XX wieku. Następnie zastosujemy je w celu odnalezienia postaci normalnych niektórych tkanin względem formy objętości lub formy symplektycznej przestrzeni tła. Podamy również przykłady zastosowań wyprowadzonej teorii w szeroko pojętej fizyce matematycznej, w tym w numerycznej relatywistyce.

Słowa kluczowe: *foliacje, formy różniczkowe, geometria różniczkowa, geometria symplektyczna, koneksje liniowe, postacie normalne, tkaniny*

Abstract

Web geometry is a vast, well-developed field of mathematics, with many applications in various domains of human knowledge. Some of its most celebrated contributions are to mathematical physics, where, for example, the notion of *Veronese web* has become a basic building block of the theory of *bi-Hamiltonian systems*. It is worthwhile to note that, by stepping slightly outside of bounds of classical definitions, one finds there a true wealth of geometrical structures carrying several natural integrable tangent distributions, such as *bi-Lagrangian structures*, the source of which can be traced back to research on methods of geometric quantization, and *foliated pseudo-Riemannian structures*, widely used in numerical relativity via *ADM 3+1 formalism*. It has become the norm that these structures are not designated with the term “web”, which is traditionally reserved for systems of foliations with nontrivial differential-geometric local structure. Nevertheless, despite its local triviality from the point of view of differential geometry, its local structure in the native geometry of the setting becomes apparent and tangible.

The goal of this thesis is to present a systematic study of webs in geometries richer than ordinary differential geometry, focusing specifically on the geometry of volume preserving transformations and symplectic geometry. Our work continues the preliminary research of S. Tabachnikov outlined in his work from 1993. We construct novel local invariants of *webs in unimodular geometry*, *Lagrangian 2-webs* and *generic symplectic 2-webs*. Some of these invariants include differential invariants derived from curvatures of certain natural linear connections invariant under the mappings defining the geometry, and their purely geometric counterparts, inspired by the classical *planar 3-web holonomy* phenomenon described by W. Blaschke and G. Bol in 1930s. Using these, we derive local normal forms of some of the webs in question with respect to the ambient volume or symplectic form. We also provide applications of the developed theory in mathematical physics, including numerical relativity.

Keywords: *foliations, differential forms, differential geometry, linear connections, normal forms, symplectic geometry, webs*

Spis treści

1	Wprowadzenie	9
1.1	Szkic klasycznej teorii tkanin	11
1.1.1	Koneksja Botta	12
1.1.2	Koneksja stowarzyszona z tkaniną	14
1.2	Wstępny opis wyników badań	18
1.2.1	Wstępne definicje i oznaczenia	18
1.2.2	Tkaniny w geometrii unimodularnej	19
1.2.3	Struktury bilagranżowskie	27
1.2.4	Generyczne 2-tkaniny symplektyczne	30
2	Tkaniny w geometrii unimodularnej	33
2.1	Niezmienniki różniczkowe par tkanina–forma objętości	33
2.1.1	Stowarzyszone koneksje główne	33
2.1.2	Koneksja kanoniczna	43
2.1.3	Postać koneksji we współrzędnych	50
2.1.4	Przykłady	52
2.1.5	Tensor niejednorodności	54
2.2	Zagadnienie klasyfikacyjne	58
2.3	Holonomia unimodularna tkanin	68
2.3.1	Unimodularne odbicia i pętle	71
2.3.2	Związek holonomii i tensora niejednorodności	77
2.3.3	Warunki geometryczne trywialności tkanin	80
2.3.4	Warunki geometryczne w wyższych kowymiarach	88
2.4	Zastosowania w relatywistyce	93

3	Niezmienniki geometryczne struktur bilagranżowskich	97
3.1	Definicje i podstawowe fakty	97
3.2	Podstruktury bilagranżowskie	109
3.3	Geometryczny warunek płaskości struktur bilagranżowskich	112
4	Tkaniny symplektyczne	121
4.1	Koneksja niezmiennicza 2-tkaniny symplektycznej kowymiaru $(2n, 2n)$. . .	121
4.1.1	Postać współrzędnościowa \mathcal{W} -koneksji	126
4.1.2	Interpretacja krzywizny \mathcal{W} -koneksji	130
4.2	Postać normalna płaskiej 2-tkaniny symplektycznej kowymiaru $(2, 2)$. . .	137

Rozdział 1

Wprowadzenie

W obecnych czasach rozwijanych jest wiele obszarów matematyki, których głównym obiektem zainteresowania są struktury geometryczne indukujące pewną ilość foliacji przestrzeni tła. Za przykłady takich struktur mogą posłużyć m.in. *pary symplektyczne* umożliwiające konstrukcję dwóch foliacji, które są do siebie wzajemnie skośnie-ortogonalne względem formy symplektycznej tła [8]; *rozmaitości bilagranżowskie*, które z definicji wyposażone są w formę symplektyczną oraz dwie foliacje o liściach lagranżowskich [20, 21, 51] grające role rzeczywistych odpowiedników *podwójnych polaryzacji przestrzeni fazowej* w geometrycznych ujęciach mechaniki kwantowej [28]; *struktury parakählerowskie* [3, 16] składające się z całkowalnej struktury prawie produktowej oraz zgodnej z nią metryki neutralnej, które okazują się być w odpowiedności jeden do jednego z rozmaitościami bilagranżowskimi; a także foliacje na rozmaitościach pseudoriemannowskich, często używane w numerycznej relatywistyce w celu ustalenia „osi czasu” poprzez wskazanie rodziny *hiperpowierzchni jednoczesności* na zadanej czasoprzestrzeni [4, 7, 25, 38].

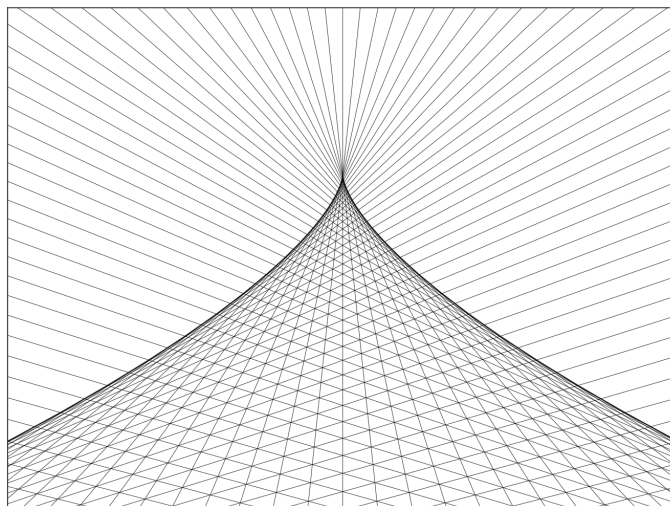
Te spośród n -tek foliacji, których przestrzenie styczne do liści w dowolnym punkcie znajdują się w położeniu ogólnym względem siebie nawzajem, nazywa się tradycyjnie *n -tkaninami* [9, 15, 24, 44]. Już na początku XX wieku pojawiły się pierwsze prace wyróżniające takie krotki foliacji. Odkrycie Thomsena i Blaschkego z 1927 roku wiążące własności tzw. powierzchni izotermicznie-asymptotycznych z wycinanymi przez nie trzema rodzinami krzywych w położeniu ogólnym na rzutowej płaszczyźnie w nieskończoności [49] stanowiło początek obfitego w ciekawe odkrycia programu badawczego ukierunkowanego na zrozumienie *geometrii tkanin*. Badania te kontynuowane są do dziś w wielu miejscach na świecie [24, 44].

Wiele stron rozmaitych publikacji matematycznych poświęcono opisaniu struktury lokalnej ogólnych tkanin [9, 24, 40], zagadnieniu algebraizacji tkanin [14, 44] a także zastosowaniom tych struktur, m.in. w fizyce matematycznej [23, 30, 35, 43]. Zagadnienie, które poruszamy w niniejszej rozprawie, znajduje się w jednej z mniej obleganych, choć (zdaniem autora) równie interesujących i wartościowych, nisz tego ekosystemu. We współczesnej literaturze trudno jest bowiem spotkać się z badaniami podstawowymi dotyczącymi lokalnych własności tkanin w geometriach bogatszych, niż geometria różniczkowa (za kilka ciekawymi wyjątkami, np. [34, 48]). Celem tej pracy jest rzucenie światła na ten obszar wiedzy. Skupimy się na lokalnych własnościach tkanin w geometrii unimodularnej oraz w geometrii symplektycznej, wskazując lokalne niezmienniki krzywiznowe pochodzące od naturalnych koneksji stowarzyszonych z ustaloną tkaniną, konstruując lokalne niezmienniki geometryczne pozwalające w intuicyjny sposób interpretować trywialność tkanin w danej geometrii, a także czyniąc pierwsze kroki w ogólnych zagadnieniach klasyfikacyjnych kielków tkanin, prezentując rozmaite postacie normalne oraz kanoniczne tkanin. Wyniki zawarte w tej pracy stanowią rozwinięcie publikacji autora [18] dotyczącej tkanin w geometrii unimodularnej oraz nieopublikowanego jeszcze manuskryptu [19] zawierającego częściowe wyniki dotyczące lokalnych niezmienników tkanin w geometrii symplektycznej.

W dalszym ciągu wstępu zaprezentujemy w bardziej szczegółowy sposób przedstawione wyżej wyniki oraz stojącą za nimi motywację, zwracając szczególną uwagę na to, co łączy wszystkie nasze podejścia do zagadnień w poszczególnych geometriach. Wprowadzimy tu również podstawowe definicje oraz elementarne fakty dotyczące rozpatrywanych przez nas tkanin. Kolejne rozdziały pracy zawierają formalną prezentację wyników uzyskanych przez autora. Dotyczą one kolejno

- Rozdział 2 – tkanin w geometrii unimodularnej,
- Rozdział 3 – struktur bilagranżowskich,
- Rozdział 4 – generycznych tkanin symplektycznych.

Zanim przejdziemy dalej, poświęćmy kilka kolejnych stron na to, by umieścić wspomniane wyniki w szerszym kontekście dotychczasowych badań nad tkaninami.



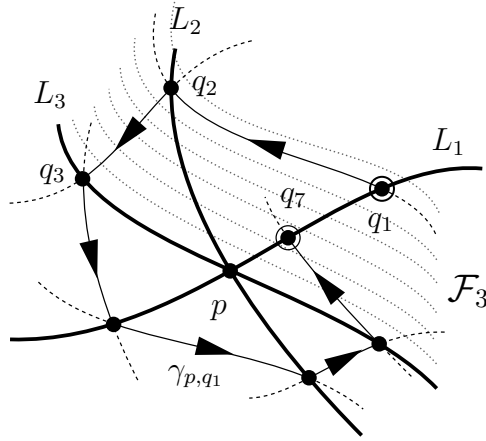
Rysunek 1.1: Tkanina określona na fragmencie płaszczyzny położonym pod krzywą osobliwą. Składa się ona z trzech foliacji: rodziny półprostych stycznych do lewej gałęzi ostrza skierowanych w górę, analogiczna rodzina półprostych dla prawej gałęzi, oraz rodzina półprostych stycznych do obu gałęzi ostrza skierowanych w dół. Zwróćmy uwagę na sześciokąty utworzone przez kolejne liście tkaniny.

1.1 Szkic klasycznej teorii tkanin

Jeden z najbardziej znanych wyników klasycznej teorii tkanin Blaschkego, Bola i Thomsena, stanowiący inspirację dla szeregu rezultatów przedstawionych w niniejszej rozprawie, dotyczy różniczkowo-geometrycznej charakteryzacji *prostowalności 3-tkanin na płaszczyźnie* [9, 44]. Opiszmy ten wynik w kilku akapitach.

Wyobraźmy sobie trzy różne foliacje $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ określone na podzbiornym otwartym U płaszczyzny \mathbb{R}^2 składające się z krzywych przecinających się parami transwersalnie w dowolnym punkcie $p \in U$ (Rysunek 1.1). Ustalmy punkt centralny $p \in U$ oraz liście L_1, L_2, L_3 foliacji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ przecinające punkt p odpowiednio. Jeżeli punkt $q_1 \in L_1$ znajduje się dostatecznie blisko punktu p , liść foliacji \mathcal{F}_2 przecinający q_1 przetnie również krzywą L_2 w punkcie q_2 . Następnie biorąc liść foliacji \mathcal{F}_3 przecinający q_2 uzyskamy kolejny punkt przecięcia $q_3 \in L_3$, by następnie utworzyć analogicznie punkty $q_4 \in L_1, q_5 \in L_2, q_6 \in L_3$ oraz finalnie $q_7 \in L_1$ (Rysunek 1.2). Punkty te łączy krzywa kawałkami gładka γ_{p,q_1} utworzona z fragmentów liści kolejnych foliacji. Mówiąc nieprecyzyjnie, 3-tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ na $U \subseteq \mathbb{R}^2$ jest *heksagonalna*, gdy każda taka krzywoliniowa łamana γ_{p,q_1} jest krzywą zamkniętą dla wszystkich $p \in U$ oraz punktów $q \in L \in \mathcal{F}_1$ znajdujących się dostatecznie blisko p .

Twierdzenie charakteryzacyjne Blaschkego-Thomsena mówi, że własność heksagonal-



Rysunek 1.2: Nie każda 3-tkanina na płaszczyźnie jest tkaniną heksagonalną.

ności 3-tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ na płaszczyźnie jest warunkiem równoważnym jej *prostowalności*, czyli możliwości doboru takiego lokalnego układu współrzędnych (x, y) o środku w dowolnym ustalonym punkcie dziedziny p , by przestrzenie styczne do liści

$$T\mathcal{F}_i = \{v \in T\mathbb{R}^2 : \exists_{L \in \mathcal{F}_i} v \in TL\} \quad (1.1.1)$$

spełniały $T\mathcal{F}_1 = \ker dy$, $T\mathcal{F}_2 = \ker dx$ oraz $T\mathcal{F}_3 = \ker(dx+dy)$ [44, Theorem 1.2.4]. Wynik ten dowodzi się wiążąc ten warunek z *trzecim* warunkiem równoważnym, mianowicie z płaskością tzw. *koneksji Cherna* stowarzyszonej z tkaniną \mathcal{W} [2].

Koneksja ta służy w pewnym sensie za prototyp dla pozostałych koneksji rozpatrywanych w rozprawie. Z tego powodu zaprezentujemy ją poniżej w sposób w pełni formalny. Podczas gdy standardowa (i jednocześnie oryginalna [12]) konstrukcja koneksji Cherna posługuje się formami różniczkowymi i formalizmem reperu ruchomego Cartana, proponujemy tu prezentację niestandardową wykorzystaną m.in. w [40] – nieco mniej przyjazną rachunkom, lecz dobrze oddającą pewną geometryczną intuicję, którą można zastosować przy badaniu innych koneksji stowarzyszonych z tkaninami w różnych geometriach. Źródłem tej intuicji jest pojęcie *koneksji Botta*.

1.1.1 Koneksja Botta

Niech dana będzie foliacja \mathcal{F} rozmaitości M . Koneksja Botta stowarzyszona z \mathcal{F} to *koneksja częściowa* $D^{\mathcal{F}} : \Gamma(T\mathcal{F}) \times \Gamma(TM/T\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(TM/T\mathcal{F})$ działająca wzdłuż wiązki $T\mathcal{F}$

wektorów stycznych do liści foliacji \mathcal{F} zadana wzorem

$$D_X^{\mathcal{F}}q(Y) = q([X, Y]), \quad (1.1.2)$$

gdzie $q : TM \rightarrow TM/T\mathcal{F}$ jest odwzorowaniem ilorazowym. Zauważmy, że obiekt ten nie jest koneksją w ścisłym tego słowa znaczeniu, ponieważ nie pozwala on różniczkować cięć $TM/T\mathcal{F}$ wzdłuż wektorów, które nie są styczne do liści \mathcal{F} . Pod każdym innym względem zachowuje się on jak prawdziwa koneksja. W szczególności:

- (1) $D^{\mathcal{F}}$ jest dobrze określone. Dla cięcia $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz pól wektorowych $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ takich, że $q(Y_1) = q(Y_2)$, mamy bowiem $Y_1 - Y_2 \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Z inwolutywności dystrybucji stycznej $T\mathcal{F}$ otrzymujemy, że $[X, Y_1 - Y_2] \in \Gamma(T\mathcal{F})$, a zatem z $C^\infty(M)$ -liniowości homomorfizmu wiązek q uzyskujemy

$$D_X^{\mathcal{F}}q(Y_1) = q([X, Y_1]) = q([X, Y_2]) = D_X^{\mathcal{F}}q(Y_2), \quad (1.1.3)$$

co należało wykazać.

- (2) $D^{\mathcal{F}}$ jest odwzorowaniem $C^\infty(M)$ -liniowym ze względu na pierwszy argument. Biorąc bowiem $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ oraz $f, g \in C^\infty(M)$ docieramy do

$$\begin{aligned} D_{fX+gY}^{\mathcal{F}}q(Z) &= q([fX + gY, Z]) \\ &= f \cdot q([X, Z]) + g \cdot q([Y, Z]) - (Zf) \underbrace{q(X)}_{=0} - (Zg) \underbrace{q(Y)}_{=0} \\ &= f \cdot D_X^{\mathcal{F}}q(Z) + g \cdot D_Y^{\mathcal{F}}q(Z), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

co z dowolności wyboru f, g, X, Y_1, Y_2 prowadzi do tezy.

- (3) $D^{\mathcal{F}}$ jest odwzorowaniem \mathbb{R} -liniowym ze względu na drugi argument, co wynika natychmiast z $C^\infty(M)$ -liniowości homomorfizmu wiązek q oraz \mathbb{R} -liniowości nawiasu Liego.
- (4) $D^{\mathcal{F}}$ jest różniczkowaniem ze względu na drugi argument. Wynika to z bezpośredniego rachunku podpartego analogiczną własnością nawiasu Liego. Dla $f \in C^\infty(M)$ oraz $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ mamy

$$\begin{aligned} D_X^{\mathcal{F}}(fq(Y)) &= D_X^{\mathcal{F}}(q(fY)) = q([X, fY]) = q(f[X, Y]) + q((Xf)Y) \\ &= f \cdot q([X, Y]) + (Xf)q(Y) = f \cdot D_X^{\mathcal{F}}(q(Y)) + (Xf)q(Y), \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

co stanowi szukaną własność $D^{\mathcal{F}}$.

Zauważmy, że dobra określoność koneksji Botta $D^{\mathcal{F}}$ opiera się w zasadniczy sposób na inwolutywności dystrybucji stycznej $T\mathcal{F}$. Co więcej, „koneksja” ta jest *plaska*, co oznacza, że endomorfizm krzywizny $R(X, Y) = [D_X^{\mathcal{F}}, D_Y^{\mathcal{F}}] - D_{[X, Y]}^{\mathcal{F}}$ jest zerowy dla wszystkich $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$. To pozwala wybrać w otoczeniu dowolnego punktu $p \in M$ układ $D^{\mathcal{F}}$ -równoległych cięć lokalnych wiązki $TM/T\mathcal{F}$ wewnątrz lokalnego układu współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) , w którym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^k \ker dx_i$. Stosując definicję koneksji Botta można łatwo pokazać, że takim układem jest np. $q(\frac{\partial}{\partial x_i})$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

Założmy teraz, że do naszej dyspozycji oddane są dwie foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} o liściach wymiaru k oraz $\dim M - k$ odpowiednio, których liście przecinają się transwersalnie. W tej sytuacji mamy możliwość rozłożenia przestrzeni stycznej TM na sumę Whitneya wiązek stycznych do obu foliacji $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G}$, co dostarcza nam dwóch rzutowań

$$\pi_{\mathcal{F}} : TM \rightarrow T\mathcal{F}; v \mapsto v_{\mathcal{F}}, \quad \pi_{\mathcal{G}} : TM \rightarrow T\mathcal{G}; v \mapsto v_{\mathcal{G}}, \quad v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}}, \quad (1.1.6)$$

które opuszczają się do izomorfizmów wiązek $TM/T\mathcal{G} \simeq T\mathcal{F}$ oraz $TM/T\mathcal{F} \simeq T\mathcal{G}$ odpowiednio. Gdy wykorzystamy powyższe utożsamienia, koneksje Botta można zapisać jako

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{F}} : \Gamma(T\mathcal{F}) \times \Gamma(T\mathcal{G}) &\rightarrow \Gamma(T\mathcal{G}); & D_X^{\mathcal{F}}Y &= (\tilde{\pi}_{\mathcal{G}} \circ D_X^{\mathcal{F}} \circ \tilde{\pi}_{\mathcal{G}}^{-1})(Y) = \pi_{\mathcal{G}}[X, Y], \\ D^{\mathcal{G}} : \Gamma(T\mathcal{G}) \times \Gamma(T\mathcal{F}) &\rightarrow \Gamma(T\mathcal{F}); & D_X^{\mathcal{G}}Y &= (\tilde{\pi}_{\mathcal{F}} \circ D_X^{\mathcal{G}} \circ \tilde{\pi}_{\mathcal{F}}^{-1})(Y) = \pi_{\mathcal{F}}[X, Y], \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

gdzie $\tilde{\pi}_{\mathcal{F}} : TM/T\mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{F}$, $\tilde{\pi}_{\mathcal{G}} : TM/T\mathcal{F} \rightarrow T\mathcal{G}$ są izomorfizmami indukowanymi przez $\pi_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{G}}$ odpowiednio. Ze względu na to, że $\tilde{\pi}_{\mathcal{F}}$ oraz $\tilde{\pi}_{\mathcal{G}}$ są $C^\infty(M)$ -liniowe, odwzorowania określone powyższymi wzorami również mają wszystkie własności tradycyjnych koneksji. Gdy w przyszłości będziemy mówić o koneksji Botta związanej z parą foliacji, będziemy mieć na myśli dokładnie koneksje określone przez (1.1.7).

1.1.2 Koneksja stowarzyszona z tkaniną

Niech teraz dana będzie 3-tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ określona na rozmaitości M wymiaru $2n$ składająca się z foliacji $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ kowymiaru n , których liście przecinają się parami transwersalnie. W celu zdefiniowania koneksji Cherna 3-tkaniny \mathcal{W} posłużymy się rozkładem wiązki stycznej na sumę Whitneya $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G}$, który jest możliwy dzięki założeniu o transwersalności przecięć $T\mathcal{F}$ z $T\mathcal{G}$. Przestrzeń styczna do liści trzeciej foliacji $T\mathcal{H}$ stanowi tu dodatkową strukturę, przy pomocy której zdefiniujemy izomorfizm wiązek

$T\mathcal{F} \simeq T\mathcal{G}$. Za ten izomorfizm odpowiadają dwa wzajemnie odwrotne odwzorowania

$$\begin{aligned}\alpha : T\mathcal{F} &\hookrightarrow TM = T\mathcal{G} \oplus T\mathcal{H} \rightarrow T\mathcal{G}; & \alpha(v) &= v_{\mathcal{G}}, \\ \beta : T\mathcal{G} &\hookrightarrow TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{H} \rightarrow T\mathcal{F}; & \beta(w) &= w_{\mathcal{F}},\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

gdzie dowolne wektory $v \in T\mathcal{F}$ oraz $w \in T\mathcal{G}$ zapisują się w sposób jednoznaczny jako $v = v_{\mathcal{G}} - v_{\mathcal{H}}$ oraz $w = w_{\mathcal{F}} - w_{\mathcal{H}}$ dla pewnych $v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$, $w_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}$ oraz $v_{\mathcal{H}}, w_{\mathcal{H}} \in T\mathcal{H}$.

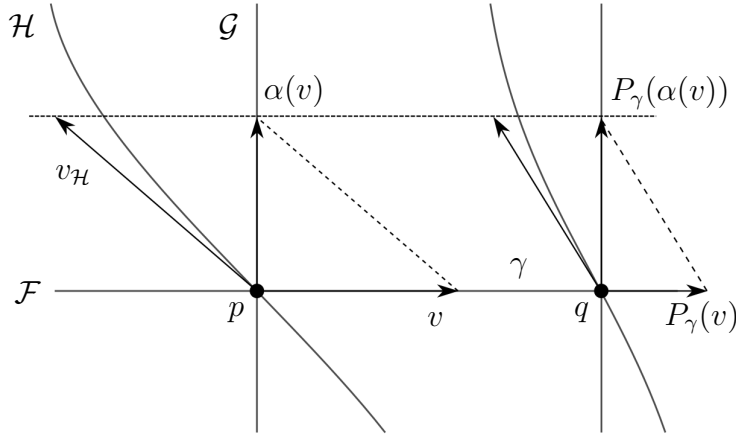
To, że oba rzuty są izomorfizmami wiązek, potwierdza bezpośredni rachunek: gdy $v \in T\mathcal{F}$ spełnia $\alpha(v) = 0$, to z definicji α wektor v leży w $T\mathcal{F} \cap T\mathcal{H} = \{0\}$, a zatem $\ker \alpha = \{0\}$. Wraz z faktem, że α jest homomorfizmem wiązek wektorowych wymiaru n , dowodzi to, że α jest odwracalne. Ponadto mamy $\alpha(\beta(w)) = w$, gdyż $w = \beta(w) - u$ dla $u \in T\mathcal{H}$, a więc jednocześnie $\beta(w) = \alpha(\beta(w)) - z$ dla pewnego $z \in T\mathcal{H}$ oraz $\beta(w) = w + u$. Z jednoznaczności rozkładu wektorów w sumie Whitneya $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{H}$ dostajemy zatem $z = -u$ oraz równość $\beta(w) = \alpha^{-1}(w)$ dla wszystkich $w \in T\mathcal{G}$.

Zgodnie z [40, Theorem 1.6] dla każdej 3-tkaniny \mathcal{W} określonej na rozmaitości wymiaru $2n$ o liściach kowymiaru n przecinających się parami transversalnie w każdym punkcie istnieje dokładnie jedna koneksja afiniczna $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, której działanie stanowi \mathbb{R} -liniowe rozszerzenie działania obu koneksji Botta $D^{\mathcal{F}}, D^{\mathcal{G}}$ stowarzyszonych z parą foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} na parach pól wektorowych stycznych do różnych foliacji uzupełnione wzorem

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= (\alpha^{-1} \circ D_X^{\mathcal{F}} \circ \alpha)(Y) & \text{dla } X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F}) \text{ oraz} \\ \nabla_X Y &= (\beta^{-1} \circ D_X^{\mathcal{G}} \circ \beta)(Y) & \text{dla } X, Y \in \Gamma(T\mathcal{G}),\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

polegającym na sprzężeniu działania koneksji ∇ z izomorfizmem $T\mathcal{F} \simeq T\mathcal{G}$ dla par pól wektorowych stycznych do tej samej foliacji (Rysunek 1.3). Tak określona koneksja nosi nazwę *koneksji Cherna* trójki $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ [40, Definition 1.7].

Twierdzenie Blaschkego [40, Theorem 3.8] orzeka, że 3-tkanina określona na rozmaitości wymiaru 2 jest heksagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej koneksja Cherna jest płaska. Fakt ten stanowi przykład zjawiska polegającego na tym, że własności geometryczne tkaniny odzwierciedlają się w kształcie infinitezymalnych niezmienników różniczkowo-geometrycznych. Zjawisko to ma miejsce również w innych geometriach, o czym przekonamy się o tym m.in. w Rozdziale 2.3 dotyczącym tkanin w geometrii unimodularnej opisującym pewną konstrukcję geometryczną inspirowaną klasycznym pojęciem heksagonalności 3-tkanin, której trywialność pociąga za sobą płaskość kanonicznej koneksji liniowej stowarzyszonej z parą złożoną z tkaniny oraz formy objętości tła.



Rysunek 1.3: Przesunięcie równoległe $P_\gamma(v)$ wektora $v = \alpha(v) - v_{\mathcal{H}} \in T_p\mathcal{F}$ dla $\alpha(v) \in T_p\mathcal{G}$ oraz $v_{\mathcal{H}} \in T_p\mathcal{H}$ względem koneksji Cherna ∇ wzdłuż krzywej γ leżącej w całości na liściu foliacji \mathcal{F} łączącej punkty p i q . Skoro dla pól wektorowych $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ zachodzi $\alpha(\nabla_X Y) = \nabla_X(\alpha(Y))$, prawdziwa jest również tożsamość $\alpha(P_\gamma(v)) = P_\gamma(\alpha(v))$, co pozwala obliczyć przesunięcie równoległe wektora $v \in T_p\mathcal{F}$ względem ∇ przy pomocy przesunięcia równoległego względem koneksji Botta $D^{\mathcal{F}}$ wektora $\alpha(v) \in T_p\mathcal{G}$.

Zarówno wyżej wymieniona koneksja kanoniczna tkaniny w geometrii unimodularnej, jak i pozostałe koneksje zdefiniowane w tej pracy, konstruujemy w oparciu o intuicję geometryczną zaczerpniętą z powyższej definicji koneksji Cherna. Aby silnie związać te koneksje ze strukturą tkaniny \mathcal{W} wymagamy, by ich działanie wzdłuż liści jednej z foliacji \mathcal{F} tkaniny \mathcal{W} na polach stycznych do możliwie największej ilości pozostałych foliacji \mathcal{G} tkaniny \mathcal{W} również redukowało się do działania koneksji Botta $D^{\mathcal{F}}$ stowarzyszonej z parą \mathcal{F}, \mathcal{G} . Działanie na polach wektorowych stycznych do \mathcal{F} odzyskujemy w oparciu o dodatkową strukturę geometryczną określoną na przestrzeni tła wymagając, by była ona zachowywana przez działanie koneksji. W przypadku 3-tkanin $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ o foliacjach kowymiaru n w przestrzeni wymiaru $2n$ dodatkową strukturą jest trzecia foliacja \mathcal{H} ; istotnie, wzór na działanie koneksji Cherna ∇ można dookreślić korzystając z warunku $\nabla_v T\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{H}$ dla $v \in TM$ [40, Theorem 1.8]. Pełne działanie koneksji kanonicznej Ω pary (\mathcal{W}, Ω) , gdzie \mathcal{W} jest m -tkaniną kowymiaru 1 na rozmaitości m -wymiarowej M , a Ω jest formą objętości na M , będzie z kolei wyznaczone przez warunek $\nabla\Omega = 0$. Podobnie, działanie koneksji kanonicznej rozpatrywanej w Rozdziale 3 *struktury bilagranżowskiej* $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ można odzyskać z warunku $\nabla\omega = 0$, gdzie ω jest formą symplektyczną przestrzeni tła. W wymienionych wyżej przypadkach struktura tła (trzecia foliacja, forma

objętości, forma symplektyczna) indukuje izomorfizm α między wiązką styczną $T\mathcal{F}$ do jednej z foliacji tkaniny \mathcal{W} a wiązką wektorową stowarzyszoną z wiązką $T\mathcal{G}$ pewnej niezmienniczej foliacji \mathcal{G} , której dystrybucja styczna dopełnia dystrybucję $T\mathcal{F}$ wewnątrz TM . Warunek zachowywania przez koneksję struktury tła odzwierciedli się w przemienności odwzorowania α i działania $\nabla_v X$ wzdłuż $v \in T\mathcal{F}$ na polach $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Relacja ta przebiegająca po wszystkich foliacjach \mathcal{F} tkaniny \mathcal{W} określi koneksję ∇ w sposób jednoznaczny za pomocą α oraz koneksji Botta $D^{\mathcal{F}}$, jak w przypadku koneksji Cherna.

Koneksje powstałe w oparciu o ten proces wyraźnie ubogacają strukturę lokalną tkanin w rozpatrywanych przez nas geometriach. Więzy nałożone na grupę odwzorowań zachowujących zadaną tkaninę przez strukturę geometryczną tła sprawiają, że w wielu geometriach obserwujemy lokalne niezmienniki tych tkanin, które nie mogą posiadać *żadnych* niezmienników lokalnych natury różniczkowo-geometrycznej. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy w danej 3-tkaninie $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ na płaszczyźnie zastąpimy foliację \mathcal{H} formą objętości (lub równoważnie: formą symplektyczną) ω . Z powstałą w ten sposób parą (\mathcal{W}_0, ω) dla $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ stowarzyszona jest koneksja kanoniczna ∇ z potencjalnie nietrywialnymi niezmiennikami krzywiznowymi pomimo, że sama tkanina \mathcal{W}_0 jest *prostowalna*, czego prosty dowód podamy niebawem w Stwierdzeniu 1.1.

Niezmienniki tkanin tego rodzaju można uznać za bardziej fundamentalne w kontekście rozpatrywanych geometrii. Mogą mieć one istotne znaczenie również przy badaniu tkanin posiadających nietrywialną różniczkowo-geometryczną strukturę lokalną. Dla przykładu: 3-tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ określona na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 z formą objętości ω posiada trzy 2-podtkaniny $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{F}, \mathcal{H})$, $\mathcal{W}_3 = (\mathcal{G}, \mathcal{H})$ o własnych lokalnych niezmiennikach unimodularnych rzutujących na postać pierwotnej tkaniny \mathcal{W} . Znane są co prawda ciekawe prace opisujące z powodzeniem lokalnie nietrywialne tkaniny w bogatszych geometriach [34]. My skupimy się jednak na tkaninach pozbawionych lokalnych niezmienników natury różniczkowo-geometrycznej mogących odwieść naszą uwagę od kwestii najbardziej podstawowych, nad którymi warto się pochylić w pierwszej kolejności. W tym celu wprowadzimy teraz szereg pojęć, które umożliwią nam dalszą dyskusję.

1.2 Wstępny opis wyników badań

1.2.1 Wstępne definicje i oznaczenia

W tej pracy skupimy naszą uwagę na n -tkaninach $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ złożonych z n foliacji rozmaitości M wymiaru m spełniających łącznie

$$\text{codim} \bigcap_{i=1}^n T_p \mathcal{F}_i = \sum_{i=1}^n \text{codim} T_p \mathcal{F}_i = m \quad (1.2.1)$$

w każdym punkcie $p \in M$. Warunek ten, który można odczytać jako warunek *położenia ogólnego* przestrzeni stycznych do liści foliacji tworzących tkaninę w zadanym punkcie $p \in M$, gwarantuje nam istnienie lokalnego układu współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) o środku w p , w którym foliacje tkaniny \mathcal{W} przyjmują postać rodzin równoległych podprzestrzeni afinicznych \mathbb{R}^m . Układy te będą towarzyszyć nam w niemal wszystkich rachunkach dotyczących tkanin i ich relacji z formą objętości, dlatego warto przedstawić je w sposób czysto formalny.

Przyjmijmy następujące oznaczenia. Określmy liczby $m_1 = 0$ oraz $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim} \mathcal{F}_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Przy ich pomocy zdefiniujemy rozbięcie zbioru indeksów $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ na podzbiory

$$\pi_i = \{m_i + 1, m_i + 2, \dots, m_{i+1}\} \subseteq [m]. \quad (1.2.2)$$

Indeksy $k \in \pi_i$ w nich zawarte odpowiadają tym współrzędnym x_k , których ustalenie określa podzbiór otwarty liścia foliacji \mathcal{F}_i zawarty w dziedzinie współrzędnościowej.

Stwierdzenie 1.1. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na M oraz niech $\dim M = m$. Dla dowolnego ustalonego punktu $p \in M$ istnieje mapa (U, φ) z lokalnym układem współrzędnych $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))$ spełniającym $\varphi(p) = 0$ oraz $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k \in \pi_i} \ker dx_k$.*

Dowód. Niech $c_i = \text{codim} \mathcal{F}_i$, $m_1 = 0$ oraz $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i c_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Z definicji foliacji \mathcal{F}_i możemy wybrać lokalny układ współrzędnych $(x_{i,1}, \dots, x_{i,m})$ o środku w p taki, $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=1}^{c_i} \ker dx_{i,k}$. Wtedy przyjmując za $x_{m_i+k} = x_{i,k}$ dla $k = 1, 2, \dots, c_i$ oraz $i = 1, 2, \dots, n$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} \dim \ker d\varphi_p &= \dim \bigcap_{k=1}^m \ker dx_k = \dim \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcap_{k=1}^{c_i} \ker dx_{i,k} \right) \\ &= \dim \bigcap_{i=1}^n T\mathcal{F}_i = m - \text{codim} \bigcap_{i=1}^n T\mathcal{F}_i \stackrel{(1.2.1)}{=} 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Otrzymaliśmy, że $d\varphi_p$ jest izomorfizmem liniowym, więc z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie za szukaną mapę można przyjąć $(U, \varphi|_U)$, gdzie U jest pewnym dostatecznie małym otoczeniem $p \in M$. \square

Dwie n -tkaniny $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ określone na M oraz N uznamy za *równoważne*, gdy łączy je dyfeomorfizm $\psi : M \rightarrow N$ spełniający $d\psi(T\mathcal{F}_i) \subseteq T\mathcal{G}_{\sigma(i)}$ dla pewnej permutacji $\sigma \in S_n$. W ten sam sposób określamy pojęcie *równoważności* dwóch kielków tkanin w zadanych punktach. Odwzorowanie ψ nazywamy *lokalną równoważnością* tkanin gdy kielk odwzorowania ψ w dowolnie wybranym punkcie $p \in M$ jest równoważnością kielków tych tkanin. Gdy pracujemy w bogatszych geometriach, tkaniny określone są na rozmaitościach wyposażonych w dodatkową strukturę geometryczną, na przykład w formę objętości Ω lub formę symplektyczną ω . W tym wypadku wymagamy, by dyfeomorfizm zadający równoważność tkanin dodatkowo zachowywał tę strukturę. Mówimy na przykład o równoważnościach *unimodularnych*, gdy $\varphi^*\Omega = \Omega$, lub równoważnościach *symplektycznych*, gdy $\varphi^*\omega = \omega$. Często odpowiednia geometria będzie wynikać z kontekstu – wtedy będziemy konsekwentnie pomijać powyższe przymiotniki.

W dalszym ciągu pracy będziemy wielokrotnie wyróżniać tkaniny *kowymiaru 1*, czyli n -tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, których foliacje składowe spełniają $\text{codim } \mathcal{F}_i = 1$. Ogólniej, *kowymiarem* n -tkaniny \mathcal{W} nazwiemy krotkę $(\text{codim } \mathcal{F}_1, \dots, \text{codim } \mathcal{F}_n)$.

Zgodnie z powyższymi oznaczeniami układ współrzędnych, którego dotyczy Stwierdzenie 1.1, można traktować jako równoważność kielka tkaniny \mathcal{W} w punkcie p oraz n -tkaniny złożonej z rodzin podprzestrzeni afinicznych \mathbb{R}^m . W szczególności oznacza to, że wszystkie kielki n -tkanin tego samego kowymiaru spełniające warunek położenia ogólnego (1.2.1) są lokalnie równoważne. Wynika stąd, że n -tkaniny w naszym ujęciu istotnie pozbawione są struktury lokalnej.

1.2.2 Tkaniny w geometrii unimodularnej

Wśród n -tkanin $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ określonych na rozmaitości M wymiaru m wyposażonej w formę objętości Ω (lub krótko: na (M, Ω)) wyróżnia się tkaniny *lokalnie trywialne*. Są to te tkaniny, dla których wokół dowolnego punktu $p \in M$ można znaleźć układ współrzędnych (x_1, \dots, x_m) , w którym każda foliacja przyjmuje postać rodziny równoległych podprzestrzeni afinicznych przestrzeni \mathbb{R}^m przy jednoczesnym spełnieniu równości $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$.

Przykład 1.1. Parą symplektyczną [8] nazywamy rozmaitość gładką M of wymiaru parzystego $2n$ wyposażoną w parę zamkniętych 2-form ω, η spełniających $TM = \ker \omega \oplus \ker \eta$. Wzięcie ich sumy $\Omega_+ = \omega + \eta$ jest jednym z kilku sposobów nadania M struktury rozmaitości symplektycznej. Dystrybucje $\ker \omega$ oraz $\ker \eta$ całkują się do pary dwóch foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} kowymiarów $2k, 2(n-k)$ dla pewnej liczby naturalnej k , które razem tworzą 2-tkaninę \mathcal{W} określoną na (M, Ω_+^n) . W układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2(n-k)})$ spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2k} \ker dx_{2i}$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2(n-k)} \ker dy_j$ istniejącym za sprawą Stwierdzenia 1.1 formy ω, η wyrażają się przez

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 2k} f_{ij}(x, y) dx_i \wedge dx_j, \quad \eta = \sum_{1 \leq i < j \leq 2(n-k)} g_{ij}(x, y) dy_i \wedge dy_j. \quad (1.2.4)$$

Równości $d\omega = d\eta = 0$ implikują zatem, że funkcje $f_{ij} = f_{ij}(x)$ oraz $g_{ij} = g_{ij}(y)$ zależą jedynie od odpowiednich zestawów zmiennych $x = (x_1, \dots, x_{2k})$ oraz $y = (y_1, \dots, y_{2(n-k)})$. Stosując zatem twierdzenie Darboux o postaci normalnej [46, Theorem 8.1] do form ω_{L_x} oraz η_{L_y} dla $L_y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}^{2(n-k)}\} \in \mathcal{F}$ oraz $L_x = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^{2k}\} \in \mathcal{G}$ otrzymujemy dwa kielki w zerze dyfeomorfizmów $\varphi_x : (\mathbb{R}^{2k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, 0)$, $\varphi_y : (\mathbb{R}^{2(n-k)}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2(n-k)}, 0)$ takie, że kielki odwzorowania $\varphi(x, y) = (\varphi_x(x), \varphi_y(y))$ spełnia $d\varphi(T\mathcal{F}) \subseteq T\mathcal{F}$, $d\varphi(T\mathcal{G}) \subseteq T\mathcal{G}$ oraz $\varphi^*(\Omega_+) = \sum_{i=1}^k dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} + \sum_{j=1}^{n-k} dy_{2j-1} \wedge dy_{2j}$. Stąd mamy $\varphi^*(\Omega_+^n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2k} \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{2(n-k)}$, a więc 2-tkanina \mathcal{W} jest lokalnie trywialna.

Tak jak w przypadku n -tkanin w geometrii różniczkowej, każda n -tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ określona na rozmaitości M wyposażonej w formę objętości Ω spełniająca $\sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_i < \dim M$ jest lokalnie trywialna. Wystarczy bowiem wybrać ze Stwierdzenia 1.1 układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) spełniający $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{j=m_i+1}^{m_i+1} \ker dx_j$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, a następnie rozciągając nierównomiernie układ współrzędnych w oparciu o gęstość $h \in C^\infty(M)$ formy objętości $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ przy pomocy odwzorowania $x \mapsto y = (y_1, \dots, y_{m-1}, y_m)$ dla

$$y_1 = x_1, \quad \dots, \quad y_{m-1} = x_{m-1}, \quad y_m = \int_0^{x_m} h(x_1, \dots, x_{m-1}, s) ds. \quad (1.2.5)$$

W ten sposób, ze względu na nierówność $m_{n+1} < m$, otrzymany układ współrzędnych wciąż spełnia $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{j=m_i+1}^{m_i+1} \ker dy_j$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, przy czym zachodzi dodatkowo

$$\Omega = dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m, \quad (1.2.6)$$

co dowodzi lokalnej trywialności tkaniny \mathcal{W} . Gdy liczba $\sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_i$ osiąga $\dim M$, sytuacja staje się nieco mniej oczywista, o czym świadczy poniższy elementarny fakt.

Twierdzenie 1.2. *Ustalmy foliacje \mathcal{F}_i przestrzeni \mathbb{R}^m dla $i = 1, 2, \dots, n$ generowane przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla pewnych liczb całkowitych $0 = m_1 < m_2 < \dots < m_n < m_{n+1} \leq m$. Przyjmijmy dodatkowo, że $m_{n+1} = \sum_{k=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_k = m$. Dla danej formy objętości $\Omega = h(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ o gęstości $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tkanina $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ określona na (\mathbb{R}^m, Ω) jest lokalnie trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial \log|h|}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \quad (1.2.7)$$

dla każdej pary indeksów $1 \leq i < j \leq n$ oraz dla każdych $k = m_i + 1, \dots, m_{i+1}$, $l = m_j + 1, \dots, m_{j+1}$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że \mathcal{W} jest lokalnie trywialna. Niech $y = \varphi(x)$ będzie zamianą współrzędnych między układem standardowym (x_1, \dots, x_m) a układem (y_1, \dots, y_m) spełniającym (bez utraty ogólności) $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dy_k$ gdzie $\Omega = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$. Odwzorowanie φ ma zatem postać

$$\varphi(x) = (\varphi_1(\mathbf{x}_1), \varphi_2(\mathbf{x}_2), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_n)) \text{ dla } \mathbf{x}_i = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.8)$$

Równość $dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ we współrzędnych można sformułować jako równoważny jej warunek

$$h(x_1, \dots, x_m) = \det \frac{d\varphi_1}{d\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \det \frac{d\varphi_n}{d\mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n), \quad (1.2.9)$$

gdzie $\frac{d\varphi_k}{d\mathbf{x}_k}$ oznacza macierz Jacobiego odwzorowania φ_k względem zmiennych \mathbf{x}_k . Prosty rachunek z wykorzystaniem powyższej równości potwierdza konieczność warunku (1.2.7).

Aby uzyskać implikację przeciwną zauważmy, że warunek (1.2.7) równoważny istnieniu n funkcji gładkich $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^{c_k}, 0)$ spełniających $\log|h|(x_1, \dots, x_m) = f_1(\mathbf{x}_1) + \dots + f_n(\mathbf{x}_n)$, gdzie $c_k = \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Niech teraz $\varphi(x_1, \dots, x_m) = (\varphi_1(\mathbf{x}_1), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_n))$ będzie odwzorowaniem o czynnikach kartezjańskich danych przez $\varphi_i(\mathbf{x}_i) = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}-1}, F_i(\mathbf{x}_i))$, gdzie

$$F_i(\mathbf{x}_i) = \int_0^{x_{m_{i+1}}} e^{f_i(x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}-1}, t)} dt. \quad (1.2.10)$$

Bezpośredni rachunek potwierdza, że dla tak skonstruowanego odwzorowania φ równanie (1.2.9) spełnione jest co do znaku, a więc kładąc $y = \varphi(x)$ otrzymujemy układ współrzędnych (y_1, \dots, y_m) spełniający $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dy_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $\Omega = \pm dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m$. Zamiana znaku jednej ze zmiennych dowodzi, że \mathcal{W} jest lokalnie trywialna. \square

Powyższa obserwacja wskazuje na istnienie pewnych niezmienników lokalnych tkanin w geometrii unimodularnej spełniających warunek (1.2.1) położenia ogólnego foliacji. Jeden z nich można skonstruować *ad hoc* poprzez następującą konstrukcję.

Definicja 1.3. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . Pole kowariantnych 2-tensorów symetrycznych $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) \in \Gamma(S^2(TM))$ zdefiniowane wzorem

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) = \sum_{i \neq j} \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_k \partial x_l}(x) dx_k dx_l, \quad (1.2.11)$$

w dowolnym układzie współrzędnych (x_1, \dots, x_m) spełniającym $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ dla pewnej funkcji $h \in C^\infty(M)$ oraz liczb $m_1 = 0$, $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, nazywamy *tensoriem niejednorodności* n -tkaniny \mathcal{W} względem Ω .

Stwierdzenie 1.4. *Tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ określonej na (M, Ω) względem Ω jest dobrze określony oraz niezmienniczy ze względu na permutację foliacji składowych tkaniny.*

Dowód. Niech $\sigma \in S_n$ będzie permutacją oraz niech (x_1, x_2, \dots, x_m) oraz (y_1, y_2, \dots, y_m) będą dwoma układami współrzędnych o środku w $p \in M$, w których foliacje składowe tkaniny określone są się przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ oraz $T\mathcal{F}_{\sigma(i)} = \bigcap_{k=\tilde{m}_i+1}^{\tilde{m}_{i+1}} \ker dy_k$, gdzie $m_1 = 0$, $\tilde{m}_1 = 0$, $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ oraz $\tilde{m}_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_{\sigma(k)}$ dla $j = 1, 2, \dots, n$. Wewnątrz tych układów współrzędnych forma objętości Ω przyjmuje postać

$$\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m = g(y) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m \quad (1.2.12)$$

dla pewnych funkcji gładkich $h, g \in C^\infty(M)$, które bez utraty ogólności można uznać za ściśle dodatnie. Przyjmijmy $\mathbf{x}_i = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}})$ oraz $\mathbf{y}_i = (y_{\tilde{m}_i+1}, \dots, y_{\tilde{m}_{i+1}})$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. i wybierzmy zamianę układu współrzędnych z (x_1, x_2, \dots, x_m) na (y_1, y_2, \dots, y_m) przeprowadzającą liście foliacji \mathcal{F}_i na liście \mathcal{F}_i . Ma ona postać $\varphi(x) = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = (\varphi_1(\mathbf{x}_{\sigma(1)}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_{\sigma(n)}))$. Dzięki temu, że spełnia ona $\varphi^*\Omega = \Omega$, musi zachodzić

$$h(x) = \det \frac{d\varphi_1}{d\mathbf{x}_{\sigma(1)}}(\mathbf{x}_{\sigma(1)}) \cdots \det \frac{d\varphi_n}{d\mathbf{x}_{\sigma(n)}}(\mathbf{x}_{\sigma(n)}) \cdot g(\varphi(x)), \quad (1.2.13)$$

Wprowadźmy oznaczenie $c_k = \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Biorąc moduły oraz drugie mieszane pochodne logarytmiczne obu stron równania (1.2.13) względem zmiennych $x_{m_i+\alpha}$

oraz $x_{m_j+\beta}$ dla $i \neq j$, $\alpha = 1, 2, \dots, c_i$ oraz $\beta = 1, 2, \dots, c_j$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log|h|(x)}{\partial x_{m_i+\alpha} \partial x_{m_j+\beta}} &= \frac{\partial^2 \log|g \circ \varphi|(x)}{\partial x_{m_i+\alpha} \partial x_{m_j+\beta}} \\ &= \sum_{\gamma=1}^{c_k} \sum_{\delta=1}^{c_l} \frac{\partial^2 \log|g|}{\partial y_{\tilde{m}_k+\gamma} \partial y_{\tilde{m}_l+\delta}}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_{\tilde{m}_k+\gamma}}{\partial x_{m_i+\alpha}}(x) \cdot \frac{\partial \varphi_{\tilde{m}_l+\delta}}{\partial x_{m_j+\beta}}(x), \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

gdzie $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(j)$. By uzasadnić ostatnią równość zauważmy, że $\varphi_{\tilde{m}_l+\delta}$ nie zależy od $x_{m_i+\alpha}$. Pomnóżmy teraz obie strony przez $dx_{m_i+\alpha} dx_{m_j+\beta}$ i zsumujmy wyniki. Pamiętając o tym, że odwzorowanie $\varphi_k(x)$ zależy tylko od \mathbf{x}_i dla $i = \sigma(k)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha=1}^{c_i} \sum_{\beta=1}^{c_j} \frac{\partial^2 \log|h|(x)}{\partial x_{m_i+\alpha} \partial x_{m_j+\beta}} dx_{m_i+\alpha} dx_{m_j+\beta} \\ &= \sum_{k \neq l} \sum_{\gamma=1}^{c_k} \sum_{\delta=1}^{c_l} \frac{\partial^2 \log|g|}{\partial y_{\tilde{m}_k+\gamma} \partial y_{\tilde{m}_l+\delta}}(\varphi(x)) d\varphi_{\tilde{m}_k+\gamma} d\varphi_{\tilde{m}_l+\delta} \\ &= \sum_{k \neq l} \sum_{\gamma=1}^{c_k} \sum_{\delta=1}^{c_l} \frac{\partial^2 \log|g|(y)}{\partial y_{\tilde{m}_k+\gamma} \partial y_{\tilde{m}_l+\delta}} dy_{\tilde{m}_k+\gamma} dy_{\tilde{m}_l+\delta}, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

co zgodnie z Definicją 1.3 pokazuje, że tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ nie zależy od kolejności występowania foliacji w definicji tkaniny oraz od wyboru układu współrzędnych prostującego \mathcal{W} . \square

Powyższe twierdzenia pokazują, że tensor ten zawiera w sobie minimalną informację zapewniającą równoważność pomiędzy jego znikaniem a lokalną trywialnością tkaniny. Choć przedstawiona powyżej konstrukcja może pozostawić czytelnika z niedosytem spowodowanym brakiem jego interpretacji geometrycznej, w Twierdzeniach 2.14 oraz 2.17 wypełnimy tę lukę wyprowadzając ten tensor w oparciu o niezmienniki krzywiznowe inspirowane tymi, które obliczono w pracy Tabachnikova [48] dla n -tkanin na (M, Ω) w szczególnym przypadku $n = 2$.

Tkaninę $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określoną na (M, Ω) rozpatrywano tam jako strukturę postaci (M, Ω, \mathcal{W}) zwaną „2-tkaniną bezdywergencyjną” (ang. *divergence-free 2-web*). Struktura ta posłużyła w tym artykule za byt pomocniczy, którego własności pozwoliły uprościć postać normalną ogólnej 2-tkaniny Legendre’a poprzez związanie członów czwartego rzędu dodatkowymi równościami. W tym celu Tabachnikov wykazał, że każda 2-tkanina bezdywergencyjna $(M, \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ składająca się z foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} kowymiaru $k, m - k$ odpowiednio wyposażona jest w kanoniczną koneksję ∇ , której krzywizna odzwierciedla w pełni lokalną strukturę tkaniny.

Koneksja ta określona jest na *wiązce wyznacznikowej* $\det T\mathcal{F}$ wiązki $T\mathcal{F}$, którą definiujemy jako wiązkę wszystkich multiwektorów $\eta \in \Lambda^{m-k}(T\mathcal{F})$ najwyższego stopnia. Jej

konstrukcja przebiega z wykorzystaniem *koneksji Botta* $D^{\mathcal{F}}, D^{\mathcal{G}}$ związanych z parą foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} , które zdefiniowano i szczegółowo opisano w Rozdziale 1.1.1. Zauważmy, że koneksja Botta $D^{\mathcal{G}}$ działa w sposób naturalny na wiązce wyznacznikowej $\det T\mathcal{F}$ poprzez regułę Leibniza. Posługując się izomorfizmem wiązek

$$\mu : \det T\mathcal{F} \rightarrow (\det T\mathcal{G})^*; \quad \mu(\eta) = \eta \lrcorner \Omega. \quad (1.2.16)$$

zadany przez kontrakcję argumentu z formą objętości Ω tkaniny bezdywergencyjnej $(M, \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$, koneksję ∇ konstruujemy w następujących trzech krokach.

- (1) Jeżeli $v \in T\mathcal{G}$ oraz $\eta \in \det T\mathcal{F}$, połóżmy $\nabla_v \eta = D^{\mathcal{F}}\eta$.
- (2) Jeżeli $v \in T\mathcal{F}$, $\eta \in \det T\mathcal{G}$ oraz $\xi \in (\det T\mathcal{G})^*$, zdefiniujemy $(\widetilde{\nabla}_v \xi)(\eta) = v(\xi(\eta)) - \xi(D^{\mathcal{G}}\eta)$, gdzie $v f$ to różniczkowanie funkcji $f \in C^\infty(M)$ w kierunku $v \in TM$.
- (3) Jeżeli $v \in T\mathcal{F}$ oraz $\eta \in \det T\mathcal{F}$, to połóżmy $\nabla_v \eta = \mu^{-1} \circ \widetilde{\nabla}_v \circ \mu(\eta)$.

Powyższy przepis prowadzi nas do następującej definicji.

Definicja 1.5. *Koneksją Tabachnikova 2-tkaniny bezdywergencyjnej $(M, \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ nazywamy koneksję $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\det T\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\det T\mathcal{F})$, której działanie określone jest wzorem*

$$\nabla_X \eta = \mu^{-1} D_{X_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{F}}(\mu\eta) + D_{X_{\mathcal{G}}}^{\mathcal{G}}\eta, \quad (1.2.17)$$

gdzie dla ustalonego pola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(M)$ cięcia $X_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $X_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$ są wyznaczone jednoznacznie przez relację $X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{G}}$.

Ponieważ wiązka $\det T\mathcal{F}$, na której określona jest koneksja ∇ , jest wiązką liniową (tzn. wiązką wektorową wymiaru 1), tensor krzywizny koneksji ∇ można zadać przy pomocy pojedynczej 2-formy ω . Tabachnikov odnalazł jej postać: wewnątrz dowolnego dodatnio zorientowanego krzywoliniowego układu współrzędnych $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{m-k})$ spełniającego $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{m-k} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{i=1}^k \ker dx_i$, jest nią $\omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_i \partial y_j} dx_i \wedge dy_j$, gdzie funkcja $h \in C^\infty(M)$ to funkcja gęstości formy objętości $\Omega = h(x, y) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-k}$ w tych współrzędnych. Wskazał też (bez dowodu), że znikanie tego tensora jest tożsame z lokalną trywialnością tkaniny bezdywergencyjnej $(M, \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$.

W pracy Tabachnikova wyprowadzono również postać normalną gęstości $h \in C^\infty(M)$ formy objętości Ω w układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{m-k})$ spełniającym $T\mathcal{F} =$

$\bigcap_{i=1}^{m-k} dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{i=1}^k dx_i$. Zgodnie z nią, funkcję h można wyrazić jako

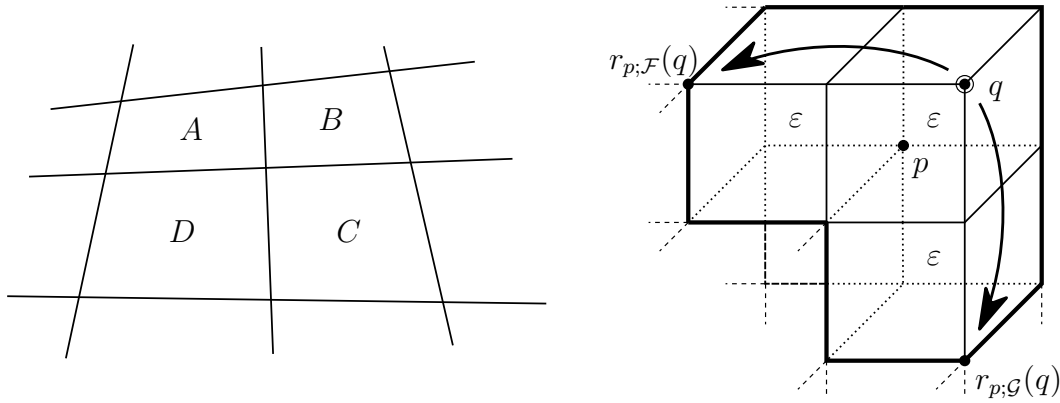
$$h(x, y) = 1 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-k} h_{ij} x_i y_j + H(x, y), \quad (1.2.18)$$

gdzie $H \in \mathfrak{m}^3$ dla ideału maksymalnego $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{m-k} \rangle$ pierścienia kielków w zerze funkcji gładkich na \mathbb{R}^m . Współczynniki h_{ij} to dokładnie współczynniki stojące przy $dx_i \wedge dy_j$ wewnątrz 2-formy krzywizny ω koneksji Tabachnikowa ∇ wzięte w początku układu współrzędnych. Współczynniki te pozwalają w pełni odzyskać postać koneksji ∇ w zerze.

W dalszej części pracy przystąpimy do uogólnienia wszystkich zebranych wyżej wyników Tabachnikova na ogólne n -tkaniny. W oparciu o metodę reperu ruchomego Cartana odnajdziemy jednoznacznie wyznaczoną naturalną koneksję liniową ω określoną na sumie Whitney'a wiązek wyznacznikowych $\bigoplus_{i=1}^n \det(\bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j)$ tkaniny \mathcal{W} , której działanie jest indukowane przez dowolną koneksję afiniczną Θ adaptowaną do G -struktury określającej parę (\mathcal{W}, Ω) (zwaną w przyszłości po prostu *koneksją zgodną z (\mathcal{W}, Ω)*), gdzie G jest grupą różniczek kielków autorównoważności tkaniny unimodularnie trywialnej. To pozwoli nam scharakteryzować tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ w terminach tensora Ricciego dowolnej koneksji zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) .

Wśród uogólnionych wyników znajdzie się również uogólnienie postaci normalnej formy objętości względem grupy odwzorowań zachowujących daną tkaninę na tkaniny o liczbie foliacji większej niż 2. Posłużymy się w tym celu tensorem niejednorodności wraz z wykazanym w pracy faktem, że tensor niejednorodności wraz z pewnym ustalonym zestawem „danych początkowych” pozwala odtworzyć lokalnie formę objętości przestrzeni tła. Pozwoli to nam odnaleźć postać *kanoniczną* oraz przestrzeń modułów form objętości w przypadku 2-tkanin na płaszczyźnie.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na pewne spostrzeżenie poczynione w [48, Fig. 2], gdzie podano ciekawą interpretację geometryczną krzywizny naturalnej koneksji 2-tkaniny na (\mathbb{R}^2, Ω) . Zauważono tam, że jej jedyny niezerowy współczynnik we współrzędnych prostujących tkaninę (Stwierdzenie 1.1) mierzy stopień niespełnienia równości $ac = bd$ pomiędzy iloczynami pól a, b, c, d pewnych przylegających wierzchołkiem czworoboków krzywoliniowych A, B, C, D ograniczonych liśćmi tkaniny (Rysunek 1.4, lewa strona). Nasuwa się zatem naturalne pytanie: czy podobna interpretacja krzywizny koneksji naturalnej n -tkaniny \mathcal{W} istnieje również w wyższych (ko)wymiarach? Odpowiedź na to pytanie okazuje się być pozytywna. W Rozdziale 2.3 zdefiniujemy lokalne niezmienniki



Rysunek 1.4: Po lewej: interpretacja Tabachnikova krzywizny koneksji naturalnej 2-tkaniny na (\mathbb{R}^2, Ω) . Po prawej: działanie kielków odwzorowań $r_{p;\mathcal{F}}, r_{p;\mathcal{G}}$. Obszary ograniczone przez liście tkaniny \mathcal{W} mają te same Ω -objętości, równe ε .

geometryczne inspirowane *grupą holonomii* 3-tkaniny na płaszczyźnie generowaną przez kielk odzworowania $q_1 \mapsto q_7$ określonego na początku Rozdziału 1.1.

W centrum tej definicji znajdują się kielki odwzorowań gładkich $r_{p;\mathcal{F}}$ związanych z każdą parą $(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ składającą się z kielka w $p \in M$ tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ kowymiaru 1 na (M, Ω) oraz jednej z jej foliacji \mathcal{F}_i . Działanie $r_{p;i}$ na punkcie $q \in M$ leżącym po jednej stronie hiperpowierzchni $L \in \mathcal{F}_i$ zawierającej p sprowadza się do przemieszczenia punktu q do punktu $q' = r_{p;i}(q)$ leżącego po drugiej stronie L wzdłuż krzywej będącej przecięciem liści pozostałych foliacji \mathcal{F}_j dla $j \neq i$ zawierających punkt q w taki sposób, by obszary $R_{p,q}$ oraz $R_{p,q'}$ ograniczone przez liście tkaniny \mathcal{W} przecinające jeden z punktów należących do pary p, q oraz p, q' odpowiednio miały identyczne objętości względem formy Ω (Rysunek 1.4, prawa strona). Złożenia $\ell_{p;i,j} = r_{p;j} \circ r_{p;i} \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}$ dla $i \neq j$ transportują argument wzdłuż konkatenacji tych krzywych. Dowiedzimy, że ta krzywoliniowa łamana jest zamknięta dla wszystkich par $i \neq j$ oraz $p \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy tkanina \mathcal{W} jest lokalnie trywialna. Podamy również interpretację tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny \mathcal{W} względem Ω w terminach odwzorowań $\ell_{p;i,j}$. Wykażemy, że współczynnik przy $dx_i dx_j$ tensora $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ we współrzędnych (x_1, \dots, x_m) spełniających $T\mathcal{F}_k = \ker dx_k$ dla $k = 1, 2, \dots, m$ mierzy nietrywialność odzworowania $\ell_{p;i,j}$ dla $i \neq j$ (Twierdzenie 2.37).

Odwzorowania te zagregowane w jeden twór matematyczny definiują wspomniany wyżej niezmiennik geometryczny zwany *holonomią unimodularną tkaniny \mathcal{W} w punkcie p* (Definicja 2.33). W Twierdzeniu 2.40 odniesiemy znikanie tego niezmiennika do uogólnienia interpretacji geometrycznej Tabachnikova krzywizny koneksji naturalnej w terminach

objętości przyległych czworoboków liniowych opisanej powyżej.

W ostatnim fragmencie rozdziału o tkaninach w geometrii unimodularnej zwracamy uwagę na potencjalne korzyści w numerycznych podejściach do relatywistycznej mechaniki płynów płynące z badania lokalnej trywialności tkanin określonych na czasoprzestrzeni M wyposażonej w element objętości pochodzący od metryki złożonych z foliacji lokalnymi *hiperpłaszczyznami jednoczesności* w geometrii lorentzowskiej [4, 5]. Pracując, jeżeli to możliwe, we współrzędnych posiadających nie tylko uprzywilejowane zmienne czasowe i przestrzenne (jak w klasycznym formalizmie 3+1 [7]), ale również stałą gęstość lorentzowskiego elementu objętości, możemy uprościć obliczenia związane z dywergencjami prędkości płynu występującymi m.in. w równaniu ciągłości, gdzie powyższa gęstość gra istotną rolę.

1.2.3 Struktury bilagranżowskie

Struktury bilagranżowskie [20, 21, 51], nazywane również *rozmaitościami bilagranżowskimi* oraz *2-tkaninami lagranżowskimi* [48], określa się jako czwórki $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$, gdzie (M, ω) jest rozmaitością symplektyczną, podczas gdy \mathcal{F}, \mathcal{G} to foliacje o liściach lagranżowskich względem formy symplektycznej ω przecinających się transwersalnie w każdym punkcie $p \in M$.

Wielu przykładów takich struktur dostarcza nam fizyka matematyczna. Jeden z nich konstruuje się w oparciu o standardowy formalizm optyki geometrycznej, w którym promienie przechodzące przez ustalony punkt $x \in \mathbb{R}^n$ w kierunku $v \in \mathbb{R}^n$ w jednorodnym medium reprezentuje się przez pary $(q, p) \in T^*S^{n-1}$ postaci $q = v/\|v\|$ oraz $p(w) = \langle w, x \rangle - \langle x, v \rangle \langle w, v \rangle / \|v\|^2$, gdzie $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ jest standardowym iloczynem skalarnym [6, p. 49]. Dla danych dwóch hiperpowierzchni H_1, H_2 oraz prostej afinicznej ℓ przecinającej H_1, H_2 w punktach $p \in H_1, q \in H_2$ w taki sposób, by $T_p \ell \cap T_p H_1 = \{0\}$ oraz $T_q \ell \cap T_q H_2 = \{0\}$, foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} dane przez te proste afiniczne, które przecinają punkt p, q odpowiednio, są foliacjami lagranżowskimi pewnego otoczenia prostej ℓ wewnątrz T^*S^{n-1} wyposażonej w standardową formę symplektyczną σ na wiązce kostycznej. Dla generycznych danych struktura $(M, \sigma, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ okazuje się być rozmaitością bilagranżowską [48].

Pojęcie to ma swoje źródło w pracy H. Hessa [28] dotyczącej metody kwantyzacji geometrycznej skonstruowanej w oparciu o zestaw dwóch transwersalnych *polaryzacji* danej rozmaitości symplektycznej, które definiuje się jako inwolutywne dystrybucje lagranżow-

skie P_1, P_2 wewnątrz kompleksyfikacji $T_{\mathbb{C}}M$ jej wiązki stycznej. Każda taka para wyznacza jednoznacznie beztorsyjną koneksję ∇ zachowującą formę symplektyczną tła oraz obie dystrybucje P_1, P_2 . Koneksja ta znana jest do dziś pod nazwą *koneksja bilagranżowska* (Definicja 3.1). W pracy Hessa posłużyła ona za jeden ze składników pozwalających zdefiniować odpowiadające wybranym polaryzaczom operatory położenia i pędu. Znajdzie ona również zastosowanie w niniejszej rozprawie, dlatego w Rozdziale 3 przytoczymy szereg najpotrzebniejszych faktów dotyczących koneksji bilagranżowskich oraz jej krzywizny.

Szeroką motywacją tej części pracy jest silny związek pomiędzy geometrią symplektyczną a geometrią unimodularną, który pozwala przenieść część wyników uzyskanych w Rozdziale 2 w nowe informacje dotyczące struktur bilagranżowskich. Dla przykładu, posługując się postacią tensora Ricciego koneksji zgodnych z tkaniną w geometrii unimodularnej możemy wykazać następujący fakt.

Stwierdzenie 1.6 ([51] (3.17)). *Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie strukturą bilagranżowską wymiaru $2n$. Wtedy tensor Ricciego koneksji bilagranżowskiej ∇ we współrzędnych $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ spełniających $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$ wynosi*

$$\text{Rc} = \frac{\partial^2 \log |\det A(x, y)|}{\partial x_i \partial y_j} dx_i dy_j, \quad (1.2.19)$$

gdzie $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \text{GL}(2n, \mathbb{R})$ jest macierzą o wyrazach A_{ij} spełniających

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, y) dx_i \wedge dy_j. \quad (1.2.20)$$

Dowód. Równość $\nabla\omega = 0$ pociąga za sobą $\nabla(\omega^n) = 0$, a więc z faktu, że ∇ jest beztorsyjna oraz paralelizuje foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} otrzymujemy, że zgodnie z Definicją 2.3 jest ona również koneksją zgodną z (\mathcal{W}, ω^n) dla tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ oraz formy objętości ω^n na M . Ponieważ

$$\omega^n = (\det A) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n, \quad (1.2.21)$$

stosując Lemat 2.16 otrzymujemy, że współczynniki tensora Rc przy $dx_i dy_j$ pokrywają się z odpowiednimi współczynnikami we wzorze (1.2.20).

Współczynniki przy pozostałych składnikach wynoszą zero, gdyż koneksja ∇ z definicji paralelizuje obie foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} tkaniny \mathcal{W} oraz jest płaska na jej liściach za sprawą Lematu 3.3. Stąd wynika, że

$$\text{Rc}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k dx_k \underbrace{\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}_{=0} + \sum_k dy_k \underbrace{\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}_{\in \Gamma(T\mathcal{F}) \subseteq \ker dy_k} = 0, \quad (1.2.22)$$

co wraz z podobnym rachunkiem dla $\text{Rc}(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ kończy dowód. \square

Inne spostrzeżenie dotyczące związku geometrii unimodularnej i geometrii symplektycznej prowadzi do głównego wyniku tej części pracy. Ze względu na to, że w wymiarze 2 forma symplektyczna, jako niezdegenerowana 2-forma, jest jednocześnie formą objętości, pojęcie struktury bilagranżowskiej $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ w wymiarze 2 redukuje się do pojęcia 2-tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ na rozmaitości M wyposażonej w formę objętości ω . Oznacza to w szczególności, że struktury bilagranżowskie wymiaru 2 posiadają wszystkie lokalne niezmienniki opisane w Rozdziale 2, w tym holonomię unimodularną tkaniny \mathcal{W} mierzącą w sposób geometryczny krzywiznę koneksji kanonicznej. Powstaje więc naturalne pytanie: czy można skonstruować podobne niezmienniki geometryczne dla struktur bilagranżowskich wyższych wymiarów?

W Rozdziale 3 pokażemy, że jest to istotnie możliwe. W Twierdzeniu 3.12 podamy warunek geometryczny lokalnej trywialności struktury bilagranżowskiej czerpiący z wyników uzyskanych w rozdziale dotyczącym tkanin w geometrii unimodularnej. Kluczową obserwacją pozwalającą uzyskać powyższy wynik jest to, że istota struktury symplektycznej danej rozmaitości zawarta jest w jej obiektach dwuwymiarowych, takich jak sama forma symplektyczna lub związane z nią krzywe pseudoholomorficzne [39]. Również w tym przypadku wykazemy, że pełną informację o krzywiznie koneksji bilagranżowskiej ∇ struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ możemy odczytać z koneksji kanonicznych pewnych specjalnych powierzchni symplektycznych dziedziczących strukturę bilagranżowską ze struktury tła (Lemat 3.10). To, w połączeniu z uwagą zawartą w poprzednim akapicie pozwala scharakteryzować płaskość koneksji ∇ przy pomocy znikania niezmienników geometrycznych tkanin w geometrii unimodularnej na wszystkich *powierzchniach bilagranżowskich generowanych przez hamiltoniany* (Twierdzenie 3.12).

Dowód tego faktu w sposób istotny wykorzystuje w sposób istotny wyniki I. Vaismana [51, 50] dotyczące *symplektycznego tensora krzywizny* koneksji symplektycznej ∇ o endomorfizmie krzywizny R danego wzorem

$$Rs(X, Y, Z, W) = \omega(R(Z, W)Y, X) \quad \text{dla } X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.2.23)$$

w połączeniu ze znaną odpowiedniością między geometrią bilagranżowską a *geometrią parakählerowską* [20, 21, 28], zgodnie z którą strukturze bilagranżowskiej $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ wymiaru $2n$ odpowiada w sposób jednoznaczny *metryka neutralna* g o sygnaturze (n, n)

wyposażona w całkowalną strukturę prawie produktową J zgodną z g oraz spełniającą $\nabla J = 0$ względem koneksji Levi-Civity ∇ metryki g [16]. Odpowiedniość ta pozwala zwi azać ze sob a krzywizn  koneksji bilagranżowskiej struktury tła z krzywizn  powierzchni bilagranżowskich przy pomocy narzędzi geometrii pseudoriemannowskiej. W tym celu posłużymy się bilagranżowskim analogonem pojęcia krzywizny sekcyjnej oraz tutejszym odpowiednikiem *r ównania Gaussa* (3.2.9).

Wszystkie wyżej wymienione składniki dowodu, w po czeniu z charakteryzacj  macierzy A formy symplektycznej ω struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ o płaskiej koneksji bilagranżowskiej ∇ (Twierdzenie 3.6) wykazaną w oparciu o ujęty formalizmem reperów ruchomych Cartana wzór na macierz 2-form koneksji [51, (3.16)], prowadzą  acznie do wyniku opisującego geometrycznie struktury o płaskich koneksjach bilagranżowskich.

1.2.4 Generyczne 2-tkaniny symplektyczne

Symplektyczne odpowiedniki struktur bilagranżowskich, tj. *2-tkaniny symplektyczne* określone na rozmaitości symplektycznej (M, ω) wymiaru $2n$, posiadają wyjątkowo bogatą struktur  lokalną. Tkaniny te złożone są z dwóch foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} kowymiarów $2k, 2n - 2k$, ktorzych liście są z definicji podrozzmaito ciami symplektycznymi rozmaitości M .

Wśród tego typu struktur znajdują się np. 2-tkaniny indukowane przez opisane w Przykładzie 1.1 *pary symplektyczne* (M, ω, η) . Wykazaliśmy tam co prawda, że wszystkie takie tkaniny są lokalnie trywialne. Kiełki takich tkanin \mathcal{W} lez  jednak w pewnym nigdzieg stym podzbiorze domkn ętym przestrzeni modu w wszystkich kiełków tkanin symplektycznych określonych co do symplektomorizmu. Wi ez towarzyszący określonym w Przykładzie 1.1 foliacjom \mathcal{F}, \mathcal{G} , ktorzy można wyrazić przy pomocy dystrybucji skośnie-ortogonalnych względem formy symplektycznej Ω_+ jako $T\mathcal{F}^{\Omega_+} = T\mathcal{G}$, można bowiem zapisać we wsp rzednych $(x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2(n-k)})$ prostujących \mathcal{W} , tj. spełniających $T\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{2k} \ker dx_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{2(n-k)} \ker dy_j$ jako warunek znikania pewnej lokalnie określonej funkcji macierzowej

$$A = 0, \quad \text{gdzie } \hat{\Omega}_+ = \begin{bmatrix} \Omega_+^x & A \\ -A^T & \Omega_+^y \end{bmatrix} \quad (1.2.24)$$

jest macierzą formy Ω_+ we wsp rzednych. Takie wsp rzedne zawsze można odnaleźć za sprawą Stwierdzenia 1.1.

Warunek ten wskazuje jasno, które spośród kielków 2-tkanin symplektycznych są generyczne. Są to kielki w $p \in M$ tkanin $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określonych na (M, ω) o tej własności, że macierz $\hat{\omega}$ formy symplektycznej ω we współrzędnych prostujących \mathcal{W} przyjmuje postać

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & A \\ -A^T & \omega_y \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$

dla macierzy $A : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow M_{2(n-k) \times 2k}(\mathbb{R})$ *maksymalnego rzędu*.

W tej części pracy zaprezentujemy wstępne wyniki badań autora ukierunkowanych na zrozumienie lokalnej geometrii generycznych 2-tkanin symplektycznych. Skupimy się tu jedynie na przypadku tkanin o foliacjach równych kowymiarów, tj. na 2-tkaninach kowymiaru $(2n, 2n)$ określonych na rozmaitości (M, ω) wymiaru $4n$.

Tym, co wyróżnia te tkaniny na tle pozostałych, jest fakt, że naturalne odwzorowania między wiązkami stycznymi do foliacji

$$\alpha : T\mathcal{G} \hookrightarrow TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^\omega \twoheadrightarrow T\mathcal{F}, \quad \beta : T\mathcal{F} \hookrightarrow TM = T\mathcal{G} \oplus T\mathcal{G}^\omega \twoheadrightarrow T\mathcal{G} \quad (1.2.26)$$

określone jako rzutowania wzdłuż odpowiednich dystrybucji skośnie-ortogonalnych są w przypadku generycznym izomorfizmami wiązek. Warto w tym miejscu przypomnieć sobie treść Rozdziału 1.1.2, w którym definiowana była koneksja Cherna klasycznej 3-tkaniny. Mamy bowiem wszystkie potrzebne narzędzia, by podążając w ślad za przepisem wyabstrahowanym z jej konstrukcji skonstruować jednoznacznie wyznaczoną niezmienniczą koneksję ∇ rozszerzającą obie koneksje Botta stowarzyszone z foliacjami 2-tkaniny \mathcal{W} . Koneksję tą będziemy w tej pracy nazywać *\mathcal{W} -koneksją* (Stwierdzenie 4.2). Koneksja ta, mówiąc nieprecyzyjnie, mierzy zmianę położenia danego pola wektorowego względem dystrybucji stycznych do foliacji oraz ich dystrybucji skośnie-ortogonalnych względem ω . Koneksja ta okazuje się nie być w ogólności ani płaska, ani beztorsyjna. Obie własności da się scharakteryzować w terminach postaci rzutów α, β we współrzędnych prostujących tkaninę \mathcal{W} , co wykażemy w Lemacie 4.9 oraz w Lemacie 4.10.

Te ogólne wyniki dotyczące \mathcal{W} -koneksji uturują nam drogę do pierwszych wyników dotyczących zagadnienia klasyfikacyjnego generycznych 2-tkanin symplektycznych (choć, niestety, nie okażą się one wystarczające do tego, by osiągnąć w tym obszarze znaczne postępy). Zagadnienie to zostało rozwiązane w przypadku generycznych kielków *par rozmaitości symplektycznych* o transwersalnym przecięciu przez W. Domitrza, S. Janeczko oraz M. Zhitomirskiego [17], gdzie wskazali oni postacie normalne form symplektycznych w

otoczeniu takich przecięć oraz odpowiadające im przestrzenie modułów w przypadkach, w których okazało się to być konieczne. Głównym niezmiennikiem par podrozmaitości S_1, S_2 symplektycznych przecinających się w pojedynczym punkcie $p \in S_1 \cap S_2$ okazał się zbiór ich liczb charakterystycznych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, definiowanych jako wartości własne endomorfizmu $\alpha \circ \beta$ przestrzeni $T_p S_2$ określanego przy pomocy rzutowań α, β zbliżonych w swojej definicji do wzoru (1.2.26).

Liczby te odegrają istotną rolę również w zagadnieniu klasyfikacyjnym 2-tkanin symplektycznych \mathcal{W} o płaskich i beztorsyjnych \mathcal{W} -koneksjach. Obecne narzędzia pozwoliły zaatakować ów problem jedynie w przypadku 2-tkanin kowymiaru $(2n, 2n)$ na rozmaitości wymiaru $4n$ dla $n = 1$. Uzyskana w Twierdzeniu 4.11 postać normalna formy symplektycznej ω dana przez

$$\omega = F(x) dx_1 \wedge dx_2 + G(y) dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + \lambda_0 dx_2 \wedge dy_2 \quad (1.2.27)$$

w współrzędnych (x_1, x_2, y_1, y_2) spełniających $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$ dla pewnych kielków w zerze funkcji gładkich $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ spełniających $F(0) = G(0) = 1$ oraz liczby charakterystycznej w zerze $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ uogólnia analogiczny wynik odnoszący się do przecięć podrozmaitości symplektycznych zawarty w [17]. W Przykładzie 4.2 wskazujemy z kolei tkaninę \mathcal{W} , dla której naiwne rozszerzenie powyższego wyniku na przypadek $n > 1$ nie zachodzi *pomimo płaskości i beztorsyjności \mathcal{W} -koneksji*. W celu osiągnięcia postępów w badaniach postaci normalnych tkanin symplektycznych w wyższych wymiarach należy uzyskać wgląd w kształt *dystrybucji własnych* endomorfizmów $\alpha \circ \beta$, które ze względu na swoją nietrywialność dla $n > 1$ znacznie komplikują teorię. Kolejne wyniki w tym obszarze są przedmiotem dalszych badań autora.

Rozdział 2

Tkaniny w geometrii unimodularnej

W tym rozdziale zajmiemy się strukturą lokalną n -tkaniny \mathcal{W} określonej na rozmaitości gładkiej M wymiaru m wyposażonej w nigdzie nieznikającą gładką m -formę $\Omega \in \Omega^m(M)$ zwaną *formą objętości*, lub krótko: na (M, Ω) . Wszystkie n -tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ w tym rozdziale będą spełniać warunek położenia ogólnego

$$\text{codim} \bigcap_{i=1}^n T_p \mathcal{F}_i = \sum_{i=1}^n \text{codim} T_p \mathcal{F}_i = m \quad (2.1)$$

w każdym punkcie $p \in M$. Na treść rozdziału złożą się wyniki dotyczące lokalnej geometrii n -tkanin w geometrii unimodularnej, w tym: niezmienniki krzywiznowe i geometryczne, postacie normalne form objętości związanych z tkaninami, rozwiązanie zagadnienia klasyfikacyjnego generycznych tkanin w niskich wymiarach, a także ogólna charakteryzacja tzw. tkanin *lokalnie trywialnych* za pomocą uzyskanych niezmienników. Na końcu rozdziału wskażemy również zastosowanie wyprowadzonej teorii w numerycznej relatywistyce.

2.1 Niezmienniki różniczkowe par tkanina–forma objętości

2.1.1 Stowarzyszone koneksje główne

Naszym pierwszym krokiem będzie pełna charakteryzacja zbioru koneksji afinicznych zgodnych jednocześnie ze strukturą n -tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ na M oraz z formą objętości $\Omega \in \Omega^m(M)$. W ogólności koneksje te nie są wyznaczone jednoznacznie – niemniej, definiujące je własności umożliwią nam wskazanie dobrze określonych niezmienni-

ków różniczkowych nie zależących od wyboru właściwej koneksji. Posłużymy się w tym celu *metodą reperu ruchomego* Cartana (opisaną np. w [13]).

Reper ruchomy to inaczej układ cięć $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathfrak{X}(M)^m$ wiązki stycznej do M , których wartości w każdym punkcie $p \in M$ stanowią bazę odpowiedniej przestrzeni stycznej $T_p M$. W dużym uproszczeniu metoda reperu ruchomego polega na sukcesywnym stosowaniu operatora różniczkki zewnętrznej d do koreperów $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m) \in (\Omega^1(M))^m$ dualnych do odpowiednio dobranych lokalnych reperów (e_1, e_2, \dots, e_m) , uzyskując w wyniku serię niezmienników różniczkowych rozmaitości M . Same repery (lub korepery) dobiera się w taki sposób, aby jak najlepiej odzwierciedlały one lokalną geometrię rozpatrywanej przestrzeni. Na przykład, aby dobrze ująć geometrię rozmaitości Riemannowskiej (M, g) stosuje się repery *ortonormalne* względem metryki g , tzn. spełniające $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ dla każdej pary $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, gdzie δ_{ij} jest *deltą Kroneckera* równą 1 gdy $i = j$ oraz 0 w przeciwnym wypadku [29].

W naszym przypadku *korepery dostosowane do pary* (\mathcal{W}, Ω) , gdzie \mathcal{W} jest n -tkaniną, natomiast Ω jest formą objętości na dziedzinie \mathcal{W} , przedstawiają się następująco.

Definicja 2.1. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . Lokalny koreper styczny $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ złożony z 1-form $\xi^k \in \Omega^1(U)$ określonych na pewnym wspólnym zbiorze otwartym $U \subseteq M$ nazwiemy (\mathcal{W}, Ω) -*koreperem*, gdy spełnia on

- (a) $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{j=m_i+1}^{m_i+1} \ker \xi^j$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$,
- (b) $\Omega = \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \dots \wedge \xi^m$.

Konsekwencją warunku (a) jest dodatkowa własność (\mathcal{W}, Ω) -koreperów $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$.

- (c) Jeżeli oznaczymy przez I_i ideał $\langle \xi^{m_i+1}, \dots, \xi^{m_i+1} \rangle$ wewnątrz pierścienia form różniczkowych $\Omega^\bullet(M)$, to $dI_i \subseteq I_i$.

Ideały I spełniające $dI \subseteq I$ określa się mianem *ideałów różniczkowych* [10]. Twierdzenie Frobeniusa o całkowalności układów różniczkowych orzeka, że gdy I jest ideałem różniczkowym generowanym przez 1-formy α_k , $k = 1, 2, \dots, l$, to dystrybucja styczna $\bigcap_{k=1}^l \ker \alpha_k$ całkuje się do foliacji przestrzeni M . Stosując to twierdzenie do ideałów I_i z warunku (a) możemy wykazać, że każdy (\mathcal{W}, Ω) -koreper determinuje parę (\mathcal{W}, Ω) na swojej dziedzinie.

Stwierdzenie 2.2. *Ustalmy liczby dodatnie $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}$ spełniające $\sum_{i=1}^n c_i = m$ oraz koreper styczny $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ określony na rozmaitości M posiadający własność (c) dla $m_1 = 0$ oraz $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i c_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wtedy istnieje dokładnie jedna para (\mathcal{W}, Ω) złożona z n -tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ kowymiaru (c_1, \dots, c_n) określonej na M oraz $\Omega \in \Omega^m(M)$ taka, że ξ jest (\mathcal{W}, Ω) -koreperem.*

Dowód. Własność (c) gwarantuje, że spełnione są założenia twierdzenia Frobeniusa dla ideałów $I_i = \langle \xi^{m_i+1}, \dots, \xi^{m_{i+1}} \rangle$ [10]. Stosując je uzyskujemy, że $\bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker \xi^k = T\mathcal{F}_i$ dla pewnych foliacji \mathcal{F}_i przestrzeni M . Stąd, że ξ jest koreperem, układ (ξ^1, \dots, ξ^m) jest liniowo niezależny wewnątrz T_p^*M w każdym punkcie $p \in M$, co pozwala nam wnioskować, że (1) forma $\Omega = \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \dots \wedge \xi^m$ jest nieznikająca, oraz (2) $\sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_i = m$. Struktura $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ jest zatem n -tkaniną, a ξ jednym z jej (\mathcal{W}, Ω) -koreperów. Postać $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ i Ω jest w pełni zdeterminowana przez własności (a) i (b) odpowiednio. \square

Powyższe stwierdzenie pozwala nam zinterpretować pary złożone z n -tkaniny oraz formy objętości jako pewne częściowo całkowalne G -struktury dla grupy Liego G wszystkich macierzy, których naturalne działanie na koreperach stycznych zachowuje własność bycia (\mathcal{W}, Ω) -koreperem dla ustalonej tkaniny trywialnej \mathcal{W} na $(\mathbb{R}^m, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$. Dokładniej:

$$G = \{A \in SL(m, \mathbb{R}) : A = \left[\begin{array}{c|ccc} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{array} \right], A_i \in GL(c_i, \mathbb{R})\} \quad (2.1.1)$$

gdzie $c_i = \text{codim } \mathcal{F}_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. W szczególności, lokalnie trywialne n -tkaniny \mathcal{W} na (M, Λ) można scharakteryzować jako G -struktury lokalnie płaskie, tj. posiadające w otoczeniu każdego punktu $p \in M$ lokalne (\mathcal{W}, Λ) -korepery $(dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$ zadane przez różniczki współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) .

Ta interpretacja pozwala zwięźle opisać klasę koneksji zgodnych ze strukturą tkaniny. W formalizmie Cartana koneksję liniową $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ określoną na wiązce wektorowej $E \xrightarrow{p} B$ wymiaru m utożsamia się z pewną 1-formą $\Theta \in \Omega^1(\text{Fr}E; \mathfrak{gl}(m; \mathbb{R}))$ o wartościach macierzowych, zwaną 1-formą koneksji ∇ . Dziedzina Θ jest wiązka repereów $\text{Fr}E$, tj. wiązka, której cięciami są liniowo niezależne m -tki cięć wiązki E . Mówiąc

krótko, forma ta przypisuje każdemu takiemu lokalnemu reperowi $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ macierz 1-form $\theta = [\theta_k^j]_{j,k=1,\dots,m}$ daną przez $\theta_k^j = \xi^j(\nabla e_k)$, gdzie $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ jest koreperem dualnym do \mathcal{E} . Macierze te zależą w istotny sposób od wyboru reperu: jeżeli $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ jest innym reperem określonym na podzbiorku otwartym dziedziny reperu \mathcal{E} , a $\xi' = ((\xi')^1, (\xi')^2, \dots, (\xi')^m)$ jest koreperem dualnym do \mathcal{E}' , to macierz 1-form θ' względem reperu \mathcal{E}' związana jest z θ poprzez

$$\theta = Q \cdot \theta' \cdot Q^{-1} + dQ \cdot Q^{-1}, \quad (2.1.2)$$

gdzie Q to macierz przejścia spełniająca $\xi^i = \sum_j Q_j^i (\xi')^j$ dla $j = 1, 2, \dots, m$. Każda 1-forma $\Theta \in \Omega^1(\text{Fr}E; \mathfrak{gl}(m; \mathbb{R}))$, dla której zachodzi równanie (2.1.2) niezależnie od wyboru pary reperów $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ określonych na wspólnej dziedzinie, definiuje dokładnie jedną dobrze określoną koneksję ∇ o 1-formie koneksji Θ . Z równania (2.1.2) wprost wynika, że wskazanie macierzy 1-formy koneksji θ na globalnym reperze \mathcal{E} wystarczy, by zgodnie z powyższym warunkiem zdefiniować 1-formę Θ jednoznacznie.

Interesujące nas koneksje są beztorsyjnymi koneksjami afinicznymi, tj. koneksjami $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ określonymi na wiązce stycznej $E = TM$. Dziedziną ich 1-formy Θ jest wiązka reperów stycznych $\text{Fr}M$. Warunek beztorsyjności koneksji ∇ zapisuje się w tym języku jako *pierwsze równanie strukturalne Cartana*

$$d\xi^j + \sum_k \theta_k^j \wedge \xi^k = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.1.3)$$

zachodzące dla dowolnego koreperu ξ i odpowiadającej mu macierzy 1-formy koneksji θ . Koneksje zgodne z parą (\mathcal{W}, Ω) określimy jako te, które spełniają dodatkowy warunek: ich 1-formy koneksji Θ w (\mathcal{W}, Ω) -koreperach mają przyjmować wartości w algebrze Liego \mathfrak{g} grupy G danej przez (2.1.1), tj. Θ ma być koneksją na wiązce głównej (\mathcal{W}, Ω) -koreperów w sensie [31, Chapter II].

Powyższy warunek zgodności można zapisać nieco wygodniej korzystając z relacji równoważności \sim odpowiadającej podziałowi zbioru indeksów $[m]$ na klasy abstrakcji π_i , $i = 1, 2, \dots, n$ określone w (1.2.2). Bardziej formalnie:

$$i \sim j \iff i, j \in \{m_k + 1, m_k + 2, \dots, m_{k+1}\} \text{ dla pewnego } k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.4)$$

gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. W przeciwnym wypadku napiszemy, że $i \not\sim j$. Dodatkowo, w ramach konsekwentnego stosowania formalizmu Cartana, będziemy bez ostrzeżenia utożsamiać koneksję afiniczną ∇ z jej 1-formą $\Theta \in \Omega^1(\text{Fr}M, \mathfrak{gl}(m; \mathbb{R}))$.

Definicja 2.3. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną zadaną na m -wymiarowej rozmaitości gładkiej M , oraz niech $\Omega \in \Omega^m(M)$. Beztorsyjną koneksję afiniczną ∇ o 1-formie koneksji Θ nazwiemy *zgodną z (\mathcal{W}, Ω)* , jeżeli jej macierz 1-form $\theta = [\theta_k^j]_{j,k=1,\dots,m}$ w dowolnym (\mathcal{W}, Ω) -koreperze spełnia następujące warunki.

- (1) $\forall_{j \neq k} \theta_k^j = 0$, (\mathcal{F}_i są ∇ -równoległe)
- (2) $\sum_{k=1}^m \theta_k^k = 0$. (forma objętości Ω jest ∇ -równoległa)

Powyższe warunki wyrażone przy pomocy pochodnej kowariantnej ∇ rzeczywiście odpowiadają ich adnotacjom w nawiasach. Istotnie, jeżeli (e_1, e_2, \dots, e_m) jest reperem dualnym do (\mathcal{W}, Ω) -koreperu $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$, to warunek

- (1) jest równoważny $\nabla_V X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)$ dla każdego $V \in \mathfrak{X}(M)$ oraz $X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)$, co łatwo wynika z warunku: $X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \sum_{k=m_i+1}^{m_i+1} X^k e_k$, oraz ze wzoru

$$\nabla_V X = \sum_k (dX^k + \sum_j X^j \theta_j^k)(V) \cdot e_k, \quad (2.1.5)$$

prawdziwego dla dowolnych $V, X \in \mathfrak{X}(M)$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$.

Z kolei warunek

- (2) jest równoważny $\nabla \Omega = 0$, gdyż dla każdego $V \in \mathfrak{X}(M)$ zachodzi

$$\begin{aligned} \nabla_V \Omega &= \nabla_V (\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \dots \wedge \xi^m) \\ &= \sum_k \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^{k-1} \wedge (-\sum_j \theta_j^k(V) \xi^j) \wedge \xi^{k+1} \wedge \dots \wedge \xi^m \\ &= -(\sum_k \theta_k^k(V)) \Omega. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

W poniższym twierdzeniu przedstawimy konstrukcję koneksji zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) .

Stwierdzenie 2.4. *Dla każdej n -tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ na (M, Ω) istnieje beztorsyjna koneksja afiniczna zgodna z (\mathcal{W}, Ω) .*

Dowód. Ustalmy (\mathcal{W}, Ω) -koreper $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ na otoczeniu $U \subseteq M$ ustalonego punktu $p \in M$. Naszym celem będzie wskazanie macierzy 1-form $\theta = [\theta_k^j]_{j,k=1,\dots,m}$ określonych na U spełniających równanie strukturalne koneksji beztorsyjnej

$$d\xi^j + \sum_k \theta_k^j \wedge \xi^k = 0 \quad (2.1.7)$$

oraz posiadających własności (1) i (2) z Definicji 2.3. Konstrukcja θ przebiega następująco.

Z własności (c) koreperu ξ wewnątrz Definicji 2.1 możemy odnaleźć 1-formy $\alpha_k^j \in \Omega^1(U)$ równe $\alpha_k^j = 0$ dla $j \neq k$ takie, że $d\xi^j = \sum_k \alpha_k^j \wedge \xi^k$ dla wszystkich $j = 1, 2, \dots, m$. Weźmy $\beta = \sum_k \alpha_k^k$. Wyrażmy tę 1-formę przy pomocy ustalonego koreperu jako $\beta = \sum_k f_k \xi^k$ dla pewnych $f_k \in C^\infty(M)$. Następnie położmy

$$\theta_k^j = -\alpha_k^j + \delta_{jk} f_k \xi^k \quad (2.1.8)$$

dla $j, k = 1, 2, \dots, m$, gdzie δ_{jk} oznacza deltę Kroneckera.

Wzór ten definiuje szukaną koneksję lokalnie. By określić ją globalnie, posłużymy się rozkładem jedności $\{g_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ związanym z pokryciem \mathcal{U} różnitości M zbiorami otwartymi $U \in \mathcal{U}$ będącymi dziedzinami (\mathcal{W}, Ω) -koreperów $\xi_U = ((\xi_U)^1, \dots, (\xi_U)^m)$. Na zbiorach $U \in \mathcal{U}$ określamy koneksję Θ_U powyższym sposobem i definiujemy koneksję na M biorąc za macierz koneksji Θ w dowolnym koreperze ξ_V o dziedzinie otwartej $V \in M$ macierz

$$\theta = \sum_{U \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_U(x) (Q_{VU} \theta_U Q_{VU}^{-1} - (dQ_{VU}) Q_{VU}^{-1}), \quad (2.1.9)$$

gdzie Q_{VU} są macierzami przejścia zadanymi przez $(\xi_V)^k = \sum_l (Q_{VU})_l^k (\xi_U)^l$ na $U \cap V$ [31].

Aby wykazać, że wzór ten definiuje dobrze określoną koneksję, oznaczmy przez θ' macierz koneksji Θ w reperze $\xi_{V'}$ określonym na zbiorze otwartym $V' \subseteq M$ o niepustym przecięciu z V i wykażmy wzór (2.1.2). Wewnątrz $V \cap V'$ zachodzi

$$\begin{aligned} \theta' &= \sum_{U \in \mathcal{U}: U \cap V' \neq \emptyset} g_U(x) (Q_{V'U} \theta_U Q_{V'U}^{-1} - dQ_{V'U} \cdot Q_{V'U}^{-1}) \\ &= \sum_{U \in \mathcal{U}: U \cap V \cap V' \neq \emptyset} g_U(x) (Q_{V'V} Q_{VU} \theta_U Q_{VU}^{-1} Q_{V'V}^{-1} - d(Q_{V'V} Q_{VU}) \cdot Q_{V'V}^{-1} Q_{VU}^{-1}) \\ &= Q_{V'V} \left(\sum_{U \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_U(x) (Q_{VU} \theta_U Q_{VU}^{-1} - dQ_{VU} \cdot Q_{VU}^{-1}) \right) Q_{V'V}^{-1} \\ &\quad - dQ_{V'V} \cdot Q_{V'V}^{-1} \\ &= Q_{V'V} \cdot \theta \cdot Q_{V'V}^{-1} - dQ_{V'V} \cdot Q_{V'V}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Sprzegając obustronnie powyższą równość przez Q_{VU} i przenosząc składnik zawierający różniczkę na lewą stronę otrzymujemy (2.1.2).

Zauważmy, że $(Q_{UV})_l^k = 0$ dla $k \neq l$, co pozwala natychmiast uzyskać własność (1) z Definicji 2.3. Co więcej, $\det Q_{UV} = 1$, dzięki czemu otrzymujemy $\text{tr}((dQ_{UV}) Q_{UV}^{-1}) = 0$. Ta równość w połączeniu z liniowością śladu i tym, że

$$\text{tr}(Q_{UV} \theta_V Q_{UV}^{-1}) = \text{tr}(Q_{UV}^{-1} Q_{UV} \theta_V) = \text{tr}(\theta_V) = 0, \quad (2.1.11)$$

daje własność (2). Znanym faktem jest, że kombinacja wypukła koneksji beztorsyjnych również jest beztorsyjna. To pozwala nam wnioskować, że $\theta = [\theta_k^j]_{j,k=1,\dots,m}$ spełnia równoważne beztorsyjności równanie strukturalne (2.1.7). Przytoczymy tutaj zwięzły dowód tego faktu oparty na bezpośrednim rachunku. Wewnątrz każdego zbioru otwartego $U \in \mathcal{U}$ zachodzi

$$\begin{aligned}
& d(\xi_U)^j + \sum_p \theta_p^j \wedge (\xi_U)^p \\
&= d(\xi_U)^j + \sum_p \left(\sum_{V \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} \left(g_V \cdot \left(\sum_{k,l} (Q_{UV})_k^j (\theta_V)_l^k (Q_{UV}^{-1})_p^l \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sum_l (dQ_{UV})_l^j (Q_{UV}^{-1})_p^l \right) \right) \right) \wedge \underbrace{\left(\sum_{V \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_V \right)}_{=1} \cdot (\xi_U)^p \\
&= \sum_{V \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_V \cdot \left(d(\xi_U)^j + \sum_l \left(\left(\sum_k (Q_{UV})_k^j (\theta_V)_l^k - (dQ_{UV})_l^j \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \wedge \left(\sum_p (Q_{UV}^{-1})_p^l (\xi_U)^p \right) \right) \right) \\
&= \sum_{V \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_V \cdot \left(\sum_l d((Q_{UV})_l^j (\xi_V)^l) + \sum_l \left(\left(\sum_k (Q_{UV})_k^j (\theta_V)_l^k \right. \right. \right. \quad (2.1.12) \\
&\quad \left. \left. \left. - (dQ_{UV})_l^j \right) \wedge (\xi_V)^l \right) \right) \\
&= \sum_{V \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_V \cdot \left(\sum_l (dQ_{UV})_l^j \wedge (\xi_V)^l + \sum_k (Q_{UV})_k^j (d\xi_V)^k \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,l} (Q_{UV})_k^j (\theta_V)_l^k \wedge (\xi_V)^l - \sum_l (dQ_{UV})_l^j \wedge (\xi_V)^l \right) \\
&= \sum_{V \in \mathcal{U}: U \cap V \neq \emptyset} g_V \cdot \left(\sum_k (Q_{UV})_k^j \underbrace{\left((d\xi_V)^k + \sum_l (\theta_V)_l^k \wedge (\xi_V)^l \right)}_{=0 \text{ (2.1.7)}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że równanie strukturalne koneksji beztorsyjnej spełnione jest wewnątrz każdego zbioru pokrycia \mathcal{U} , a więc na całej rozmaitości M . To, wraz z wykazanymi wyżej własnościami (1) i (2), dowodzi, że Θ jest koneksją zgodną z (\mathcal{W}, Ω) . \square

Aby zbadać, czy własność zgodności jest niezmiennicza ze względu na lokalne równoważności tkanin zdefiniujemy teraz *cofnięcie* $\varphi^* \Theta$ koneksji Θ wzdłuż lokalnego dyfeomorfizmu $\varphi : M \rightarrow N$ poprzez podanie jej macierzy w koreperach. Ustalmy punkt $p \in M$ oraz koreper $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ zadany na zbiorze otwartym U tak małym, by $\varphi|_U$ było dyfeomorfizmem na obraz. Macierz θ^* koneksji $\varphi^* \Theta$ w koreperze ξ dana jest przez $(\theta^*)_k^j = \varphi^*(\theta)_k^j$ dla $j, k = 1, 2, \dots, m$, gdzie θ to macierz koneksji Θ w korepe-

rze $(\varphi|_U^{-1})^*\xi = ((\varphi|_U^{-1})^*\xi^1, \dots, (\varphi|_U^{-1})^*\xi^m)$. Bezpośredni rachunek potwierdza, że tak zadane macierze spełniają (2.1.2), a zatem $\varphi^*\Theta$ określa koneksję afiniczną na M .

Stwierdzenie 2.5. *Niech $\varphi : M \rightarrow N$ będzie lokalną równoważnością tkanin \mathcal{W}_1 oraz \mathcal{W}_2 określonych na (M, Ω) , (N, η) odpowiednio. Jeżeli Θ jest beztorsyjną koneksją zgodną z (\mathcal{W}_2, η) , to $\varphi^*\Theta$ jest beztorsyjną koneksją zgodną z (\mathcal{W}_1, Ω) .*

Dowód. Ustalmy koreper $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$, rozpatrzmy jego obcięcie do dostatecznie małego zbioru otwartego $U \subseteq M$ i oznaczmy koreper $(\varphi|_U^{-1})^*\xi$ przez ζ . Jeżeli θ, θ^* są macierzami koneksji $\Theta, \varphi^*\Theta$ w koreperach ζ, ξ odpowiednio, to dzięki równaniu strukturalnemu (2.1.3) dla macierzy θ w koreperze ζ zachodzi

$$\begin{aligned} d\xi^j + \sum_k (\theta^*)_k^j \wedge \xi^k \\ &= d(\varphi^*\zeta^j) + \sum_k \varphi^*\theta_k^j \wedge \varphi^*\zeta^k \\ &= \varphi^*(\zeta^j + \sum_k \theta_k^j \wedge \zeta^k) = 0 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

na zbiorze U . Zbiór U jest dowolnym zbiorem otwartym dziedziny ξ , podczas gdy ξ jest dowolnym koreperem na M . Z ich dowolności wnioskujemy, że koneksja $\varphi^*\Theta$ jest beztorsyjna.

Weźmy ξ, U oraz ζ jak wyżej oraz załóżmy że koreper ξ jest (\mathcal{W}_1, Ω) -koreperem. Ponieważ $\varphi|_U$ jest równoważnością tkanin, istnieje $\sigma \in S_n$ taka, że $d\varphi(T\mathcal{F}_i) = T\mathcal{G}_{\sigma(i)}$. Niech $m_1 = \tilde{m}_1 = 0$, $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim } \mathcal{F}_k$ oraz $\tilde{m}_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim } \mathcal{G}_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Określmy permutację $\tau \in S_m$ wzorem $\tau(m_i + k) = \tilde{m}_{\sigma(i)} + k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $k = 1, 2, \dots, \text{codim } \mathcal{F}_i$, a następnie zdefiniujmy koreper ζ_σ na zbiorze otwartym $\varphi(U)$ poprzez $(\zeta^{\tau(1)}, \dots, \zeta^{\tau(m-1)}, (\text{sgn } \tau) \cdot \zeta^{\tau(m)})$. Naszym obecnym celem jest wykazanie, że ζ_σ jest (\mathcal{W}_2, η) -koreperem.

Z definicji równoważności tkanin wiemy, że (1) $d\varphi(T\mathcal{F}_i) = T\mathcal{G}_{\sigma(i)}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, oraz (2) $\varphi^*\eta = \Omega$. Stąd, że ξ jest (\mathcal{W}_1, Ω) -koreperem, spełnione są warunki (a) oraz (b) z Definicji 2.1. Posługując się tym pierwszym otrzymujemy

$$\ker \zeta^k = \ker(\varphi|_U^{-1})^*\xi^k = \ker(\xi^k \circ d\varphi|_U^{-1}) = d\varphi(\ker \xi^k). \tag{2.1.14}$$

To prowadzi do równości

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=\tilde{m}_i+1}^{\tilde{m}_{i+1}} \ker \zeta_\sigma^k &= \bigcap_{k=\tilde{m}_i+1}^{\tilde{m}_{i+1}} \ker \zeta^{\tau(k)} = \bigcap_{k=\tau^{-1}(\tilde{m}_i+1)}^{\tau^{-1}(\tilde{m}_{i+1})} \ker \zeta^k \\ &= d\varphi \left(\bigcap_{k=m_{\sigma^{-1}(i)+1}}^{m_{\sigma^{-1}(i+1)}} \ker \xi^k \right) = d\varphi(T\mathcal{F}_{\sigma^{-1}(i)}) = T\mathcal{G}_i. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\eta &= (\varphi|_U^{-1})^* \Omega = (\varphi|_U^{-1})^* (\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \cdots \wedge \xi^m) = \zeta^1 \wedge \zeta^2 \wedge \cdots \wedge \zeta^m \\ &= (\text{sgn } \tau) \cdot \zeta^{\tau(1)} \wedge \zeta^{\tau(2)} \wedge \cdots \wedge \zeta^{\tau(m)} = \zeta_\sigma^1 \wedge \zeta_\sigma^2 \wedge \cdots \wedge \zeta_\sigma^m.\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Uzyskane równości dowodzą, że ζ_σ spełnia warunki (a), (b) na swojej dziedzinie, a zatem jest (\mathcal{W}_2, η) -koreperem.

Wynik ten pozwoli nam udowodnić, że warunki zgodności (1) oraz (2) z Definicji 2.3 zachodzą dla macierzy θ^* w koreperze ξ . Zauważmy, że macierz koneksji Θ w (\mathcal{W}_2, η) -koreperze ζ_σ spełnia powyższe warunki ze względu na zgodność koneksji z parą (\mathcal{W}_2, η) . Zgodnie ze wzorem (2.1.2) macierz ta ma postać $\theta_\sigma = A \cdot \theta \cdot A^{-1}$, gdzie A to macierz o wyrazach $A_k^j = (-1)^{\delta_{jm}} \delta_{j\tau(k)}$. Bezpośredni rachunek prowadzi do $(\theta_\sigma)_k^j = (\theta)_{\tau(k)}^{\tau(j)}$, a więc

$$(\theta^*)_k^j = \varphi^*(\theta_k^j) = \varphi^*((\theta_\sigma)_{\tau^{-1}(k)}^{\tau^{-1}(j)})\tag{2.1.17}$$

Wyrażenie to jest równe 0 gdy $j \not\sim k$ w sensie notacji (2.1.4), ponieważ zgodnie z definicją permutacji τ zachodzi $j \sim k \iff \tau(j) \sim \tau(k)$. Warunek (1) jest zatem spełniony dla koreperu ξ na zbiorze otwartym U . Warunek (2) jest z kolei konsekwencją równości

$$\sum_k (\theta^*)_k^k = \sum_k \varphi^*((\theta_\sigma)_{\tau^{-1}(k)}^{\tau^{-1}(k)}) = \sum_k \varphi^*((\theta_\sigma)_k^k) = \varphi^*(\sum_k (\theta_\sigma)_k^k) = 0.\tag{2.1.18}$$

Dowolność zbioru U sprawia, że oba warunki są spełnione na całej dziedzinie koreperu ξ . Ponieważ (\mathcal{W}_1, Ω) -koreper ξ był wybrany dowolnie, koneksja $\varphi^*\Theta$ jest beztorsyjna i zgodna z (\mathcal{W}_1, Ω) . \square

Na początku rozdziału zwróciliśmy uwagę na fakt, że koneksje zgodne z (\mathcal{W}, Ω) nie są w ogólności wyznaczone jednoznacznie. Poniższy lemat wskaże precyzyjnie ich ilość poprzez charakteryzację przestrzeni wszystkich koneksji zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) w zależności od kowymiaru badanej tkaniny.

Lemat 2.6. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) , oraz niech $\hat{\Theta}$ będzie ustaloną koneksją beztorsyjną zgodną z (\mathcal{W}, Ω) . Zdefiniujmy odwzorowanie $\Theta \mapsto D(\Theta - \hat{\Theta})$ ze zbioru wszystkich beztorsyjnych koneksji zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) w zbiór wszystkich symetrycznych 2-kowariantnych pól tensorowych D o wartościach w TM spełniających*

- (1) $\forall_i \forall_{v, w \in T\mathcal{F}_i} D(v, w) \in T\mathcal{F}_i$,
- (2) $\forall_i \forall_{v \in T\mathcal{F}_i} \forall_{w \in \cap_{k \neq i} T\mathcal{F}_k} D(v, w) = 0$,

$$(3) \quad \forall_{v \in TM} \quad \text{tr} D(v, \cdot) = 0$$

wzorem

$$D(\Theta - \hat{\Theta})(v, w) = \sum_{j,k} (\theta - \hat{\theta})_k^j(v) w^k \cdot e_j \quad \text{dla } v, w = \sum_j w^j e_j \in T_p M \text{ oraz } p \in M, \quad (2.1.19)$$

gdzie $\theta, \hat{\theta}$ są macierzami koneksji $\Theta, \hat{\Theta}$ w dowolnym koreperze ξ o reperze dualnym $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ zawierającym punkt p w swojej dziedzinie.

Dowód. Wykażmy, że $D := D(\Theta - \hat{\Theta})$ jest $(2, 1)$ -polem tensorowym na M wtedy i tylko wtedy, gdy Θ jest 1-formą koneksji beztorsyjnej. W tym celu wybierzmy reper $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ oraz dualny do niego koreper $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$. Wtedy zmiana koreperu $\xi^j \mapsto \sum_k A_k^j \xi^k$, sprawi, że macierz $\hat{\theta}$ koneksji $\hat{\Theta}$ przekształci się zgodnie z (2.1.2) w $A\theta A^{-1} + dA \cdot A^{-1}$. To, że 1-forma Θ jest formą koneksji, jest równoważne temu, że jej macierz θ przekształca się w ten sam sposób, co forma $\hat{\Theta}$. To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $\theta - \hat{\theta}$ zmienia się zgodnie z regułą przekształcenia dla endomorfizmów wiązki stycznej

$$\theta - \hat{\theta} \mapsto A(\theta - \hat{\theta})A^{-1}, \quad (2.1.20)$$

lub dokładniej: gdy $\theta - \hat{\theta}$ definiuje cięcie lokalne wiązki $\text{End}(TM) \otimes \Omega^1(M)$ za pomocą reprezentacji endomorfizmu przez macierz w reperze ξ . Zgodnie z regułą (2.1.20) cięcia lokalne odpowiadające różnym koreperom ξ są ze sobą zgodne, a więc wspólnie definiują cięcie globalne wiązki $\text{End}(TM) \otimes \Omega^1(M)$. Wiązka ta jest izomorficzna z wiązką $(2, 1)$ -tensorów $TM \otimes T^*M \otimes T^*M$ poprzez przyporządkowanie każdemu tensorowi $D_{ij}^k e_k \otimes \xi^i \otimes \xi^j$ macierzy $\Delta = [\Delta_j^k]$, gdzie $\Delta_j^k = D_{ij}^k \xi^i \in T^*M$ w dowolnym koreperze ξ . Relacja $\Delta = \theta - \hat{\theta}$ gwarantuje, że wybór koneksji Θ jest równoznaczny z wyborem odpowiadającego endomorfizmowi Δ pola tensorowego D .

Zgodnie z założeniem $\hat{\Theta}$ spełnia równoważne beztorsyjności równanie strukturalne Cartana (2.1.3) w dowolnym koreperze. Stąd wynika natychmiast, że prawdziwość równania strukturalnego macierzy koneksji Θ jest równoważna warunkowi $\sum_j \Delta_j^k \wedge \xi^j = 0$. Ponieważ

$$\sum_j \Delta_j^k \wedge \xi^j = \sum_{i,j} D_{ij}^k \xi^i \wedge \xi^j = \sum_{i < j} (D_{ij}^k - D_{ji}^k) \xi^i \wedge \xi^j, \quad (2.1.21)$$

beztorsyjność Θ redukuje się do symetrii tensora D .

Ustalmy teraz (\mathcal{W}, Ω) -koreper ξ . Warunki (1)-(3) wyrażone koreperze ξ z wykorzystaniem relacji \sim określonej w (2.1.4) to: (1) $D_{ij}^k = 0$ dla $i \neq k$ oraz $j \neq k$; (2) $D_{ij}^k = 0$

dla $i \neq j$; (3) $\sum_j D_{ij}^j = 0$. Równości te redukują się do następujących relacji między elementami odpowiadającej D macierzy Δ : (1)-(2) $\Delta_j^k = 0$ dla $j \neq k$; (3) $\sum_k \Delta_k^k = 0$. Warunki te odpowiadają warunkom (1) oraz (2) z Definicji 2.3, które spełnione są przez każdą koneksję zgodną z (\mathcal{W}, Ω) w koreperze ξ . Ponieważ $\hat{\Theta}$ jest taką koneksją, wstawiając $\Delta = \theta - \hat{\theta}$ do równości powyżej otrzymujemy równoważność własności (1)-(2) tensora $D(\Theta - \hat{\Theta})$ oraz zgodności z (\mathcal{W}, Ω) koneksji Θ . \square

W trakcie powyższego dowodu wykazaliśmy, że dla każdego ustalonego $k = 1, 2, \dots, m$ macierze $[D_{ij}^k]$ zbudowane ze współczynników tensorów różnicowych w ustalonym (\mathcal{W}, Ω) -koreperze to dokładnie macierze symetryczne, których wszystkie elementy poza kwadratowym blokiem leżącym na diagonalu rozpinającym indeksy $i, j = m_k + 1, \dots, m_{k+1}$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{p+1} = \sum_{l=1}^p \text{codim } \mathcal{F}_l$ dla $p = 1, 2, \dots, n$, są równe zero. Wymiar przestrzeni takich macierzy dla ustalonego k wynosi $\frac{1}{2}c_k(c_k + 1)$, gdzie $c_k = \text{codim } \mathcal{F}_k$. Dla ustalonego tensora D macierze te związane są dodatkowymi równaniami $\sum_j D_{kj}^j = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, które pozwalają nam wyznaczyć współczynniki D_{kk}^k na głównej przekątnej tensora przy pomocy pozostałych. To dowodzi, że wymiar wiązki \mathcal{D} tensorów różnicowych koneksji zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) wynosi

$$\dim \mathcal{D} = \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{1}{2}c_i(c_i + 1) - 1 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}c_i(c_i - 1)(c_i + 2). \quad (2.1.22)$$

W szczególności, gdy c_i wynosi 1 dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ wymiar wiązki \mathcal{D} wynosi 0.

Wniosek 2.7. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) kowymiaru 1. Wtedy istnieje dokładnie jedna koneksja zgodna z (\mathcal{W}, Ω) .* \square

2.1.2 Koneksja kanoniczna

Wniosek 2.7 mówi nam, że z tkaniną \mathcal{W} kowymiaru 1 określoną na (M, Ω) stowarzyszona jest dokładnie jedna koneksja zgodna z (\mathcal{W}, Ω) . Gdy tylko kowymiar jednej z foliacji tkaniny przekracza 1, koneksja zgodna z (\mathcal{W}, Ω) przestaje być wyznaczona jednoznacznie. Zauważmy jednak, że w tym wypadku, pomimo istnienia wielu koneksji Θ zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) , istnieją pewne ilości niezmiennicze skonstruowane w oparciu o koneksję Θ które nie zależą od jej wyboru.

Określmy podział zbioru indeksów $\{1, 2, \dots, m\}$ na podzbiory π_k wzorem (1.2.2) oraz odpowiadającą mu relację równoważności \sim na $\{1, 2, \dots, m\}$ za pomocą (2.1.4). Ustalmy

(\mathcal{W}, Ω) -koreper $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ oraz reper dualny $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$. Wtedy, jeżeli przez $\theta = [\theta_k^j]$ oznaczymy macierz koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) w koreperze ξ , dla dowolnego indeksu $i = 1, 2, \dots, n$ sumy $\sum_{k \in \pi_i} \theta_k^k$ wynoszą tyle samo niezależnie od wyboru Θ . Dzieje się tak, ponieważ tensory różnicowe D zdefiniowane w Lemacie 2.6 spełniają analogiczną równość $\sum_{k \in \pi_i} D_{jk}^k$ dla $j = 1, 2, \dots, m$ z własności (2) i (3) zawartych w sformułowaniu lematu.

Te ślady częściowe można zinterpretować przy pomocy pochodnej kowariantnej ∇ koneksji Θ . Jej działanie na multiwektorach postaci $\mathbf{e}_i = e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, rozszerza działanie ∇ na polach wektorowych dane w (2.1.5) poprzez regułę Leibniza:

$$\begin{aligned} \nabla(e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}}) &= \sum_{k \in \pi_i} \sum_{j=1}^m (-1)^{k-1} \theta_k^j \otimes e_j \wedge e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_k} \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}} \\ &= \sum_{k \in \pi_i} \sum_{j \neq k} (-1)^{k-1} \theta_k^j \otimes e_j \wedge e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_k} \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}} \\ &\quad + \left(\sum_{k \in \pi_i} \theta_k^k \right) \otimes e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge e_k \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}}, \quad \pi_i = \{m_i+1, \dots, m_{i+1}\}, \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

gdzie daszek nad wektorem oznacza jego pominięcie w iloczynie zewnętrznym. Pierwszy składnik sumy znika na skutek własności (1) w Definicji 2.3 koneksji zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) , dając w konsekwencji równość

$$\nabla \mathbf{e}_i = \left(\sum_{k \in \pi_i} \theta_k^k \right) \otimes \mathbf{e}_i \tag{2.1.24}$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Powyższe dwa akapity można podsumować w następujący sposób: suma Whitneya wiązek liniowych generowanych przez multiwektory \mathbf{e}_i wyposażona jest w *kanoniczną* koneksję liniową wyznaczoną jednoznacznie przez parę (\mathcal{W}, Ω) przy pomocy (dowolnej spośród) koneksji zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) . Naszym obecnym celem będzie zdefiniowanie jej w sposób formalny oraz możliwie niezmienniczy.

Zauważmy wpierrw, że pola wektorowe e_k dla $k = m_i+1, \dots, m_{i+1}$ są cięciami $T\mathcal{F}_j$ dla każdego $j \neq i$, gdzie indeks i przebiega liczby od 1 do n . Dystrybucja $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j$, jako przecięcie dystrybucji inwolutywnych, również jest inwolutywną dystrybucją styczną stałego wymiaru, a więc z twierdzenia Frobeniusa [36, Chapter 19] generuje pewną *foliację dopełniającą* \mathcal{F}_i^c . Dzięki warunkowi położenia ogólnego (1.2.1) prawdą jest, że $TM = T\mathcal{F}_i \oplus T\mathcal{F}_i^c = \bigoplus_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Łatwo to spostrzec posługując się

(\mathcal{W}, Ω) -koreperami. Niemniej, uzasadnienie powyższej tezy o rozkładach na sumy proste bez posiłkowania się współrzędnymi będzie wymagać kilku nietrywialnych rachunków. Z tego powodu wydzielimy niżej trochę miejsca na pełne jej sformułowanie.

Stwierdzenie 2.8. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną oraz niech \mathcal{F}_i^c będą foliacjami generowanymi przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wtedy*

- (1) $\dim T\mathcal{F}_i^c = \text{codim } T\mathcal{F}_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$,
- (2) $TM = T\mathcal{F}_i \oplus T\mathcal{F}_i^c = \bigoplus_{i=1}^n T\mathcal{F}_i$.
- (3) $\bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i = \bigoplus_{j \notin I} T\mathcal{F}_j$ dla dowolnego $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$,

Dowód. Wpierw wskażmy podstawową konsekwencję warunku położenia ogólnego (1.2.1) korzystając z nierówności $\text{codim } V \cap U \leq \text{codim } V + \text{codim } U$ dla podprzestrzeni U, V ustalonej przestrzeni liniowej. Dla dowolnego zbioru $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ prawdziwa jest nierówność

$$m = \text{codim } \{0\} \leq \text{codim } \bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i + \sum_{j \notin I} \text{codim } T\mathcal{F}_j \leq \sum_{i=1}^n \text{codim } T\mathcal{F}_i \stackrel{(1.2.1)}{=} m. \quad (2.1.25)$$

Ponieważ lewa i prawa strona są identyczne, wszystkie nierówności w powyższym ciągu można zamienić na równości, w wyniku czego dostajemy $\sum_{i \in I} \text{codim } T\mathcal{F}_i = \text{codim } \bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i$. W szczególności, biorąc $I = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ otrzymujemy

$$\text{codim } T\mathcal{F}_i^c = \sum_{j \neq i} \text{codim } T\mathcal{F}_j \quad (2.1.26)$$

dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. To pozwala zapisać ciąg równości

$$\begin{aligned} \dim T\mathcal{F}_i^c + \dim T\mathcal{F}_i &= (\dim TM - \text{codim } T\mathcal{F}_i^c) + (\dim TM - \text{codim } T\mathcal{F}_i) \\ &\stackrel{(2.1.26)}{=} 2 \dim TM - \sum_{j=1}^n \text{codim } T\mathcal{F}_j \stackrel{(1.2.1)}{=} \dim TM, \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

który upraszcza się do $\text{codim } T\mathcal{F}_i = \dim T\mathcal{F}_i^c$.

Dalej, z definicji $T\mathcal{F}_i^c$ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzi

$$T\mathcal{F}_i^c \cap T\mathcal{F}_i = \bigcap_{i=1}^n T\mathcal{F}_i \stackrel{(1.2.1)}{=} \{0\}. \quad (2.1.28)$$

To prowadzi wprost do $\dim(T\mathcal{F}_i^c + T\mathcal{F}_i) = \dim T\mathcal{F}_i^c + \dim T\mathcal{F}_i$, co w zestawieniu z (2.1.27) daje $TM = T\mathcal{F}_i + T\mathcal{F}_i^c$. Równość (2.1.28) pozwala orzec, że $TM = T\mathcal{F}_i \oplus T\mathcal{F}_i^c$ dla

$i = 1, 2, \dots, n$. Zauważmy teraz, że $T\mathcal{F}_j^c \subseteq T\mathcal{F}_i$ dla $j \neq i$. Dzięki temu dla dowolnego zbioru $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $i = 1, 2, \dots, n$ mamy

$$T\mathcal{F}_i^c \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} T\mathcal{F}_j^c \subseteq T\mathcal{F}_i^c \cap T\mathcal{F}_i = \{0\} \quad (2.1.29)$$

z równości (2.1.28). Stosując wielokrotnie znaną tożsamość $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ wiążącą dowolne podprzestrzenie V, W pewnej ustalonej przestrzeni liniowej dostajemy

$$\dim \sum_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c = \dim T\mathcal{F}_1^c + \dim \sum_{i=2}^n T\mathcal{F}_i^c = \dots = \sum_{i=1}^n \dim T\mathcal{F}_i^c. \quad (2.1.30)$$

Kontynuując powyższy rachunek przy pomocy równości (2.1.27) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \dim T\mathcal{F}_i^c = \sum_{i=1}^n \operatorname{codim} T\mathcal{F}_i \stackrel{(1.2.1)}{=} \dim TM. \quad (2.1.31)$$

Łącząc uzyskaną wyżej równość $\dim TM = \dim \sum_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c$ z (2.1.29) uzyskujemy $TM = \bigoplus_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c$.

Niech teraz $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ będzie ustalonym podzbiorem zbioru indeksów. Znowu mamy

$$\begin{aligned} \dim TM &\leq \dim \sum_{i \in I} T\mathcal{F}_i^c + \sum_{j \notin I} \dim T\mathcal{F}_j^c \leq \sum_{i=1}^n \dim T\mathcal{F}_i^c \\ &\stackrel{(2.1.30)}{=} \dim \sum_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c = \dim TM, \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

co sprawia, że nierówności w powyższych rachunkach można zastąpić równościami. W wyniku dostajemy $\sum_{i \in I} \dim T\mathcal{F}_i^c = \dim \sum_{i \in I} T\mathcal{F}_i^c$ dla dowolnego $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, co pozwala uzyskać

$$\begin{aligned} \dim \sum_{j \notin I} T\mathcal{F}_j^c &= \sum_{j \notin I} \dim T\mathcal{F}_j^c = \sum_{j \notin I} \operatorname{codim} T\mathcal{F}_j = \operatorname{codim} \bigcap_{j \notin I} T\mathcal{F}_j \\ &= \dim TM - \operatorname{codim} \bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i = \dim \bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i. \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Równość wymiarów wraz z zawieraniem $\sum_{j \notin I} T\mathcal{F}_j^c \subseteq \bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i$ pokazują, że $\sum_{j \notin I} T\mathcal{F}_j^c = \bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i$, podczas gdy (2.1.29) dowodzi $\bigcap_{i \in I} T\mathcal{F}_i = \bigoplus_{j \notin I} T\mathcal{F}_j^c$. \square

Określmy rozbitcie zbioru indeksów $\{1, 2, \dots, m\}$ przez zbiory $\pi_i = \{m_i + 1, \dots, m_{i+1}\}$ dane w wzorze (1.2.2). Zgodnie z definicją (\mathcal{W}, Ω) -koreperu ξ możemy zapisać $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j = \bigcap_{k \notin \pi_i} \ker \xi_k$. Oznacza to, że $T\mathcal{F}_i^c = \langle e_{m_i+1}, \dots, e_{m_{i+1}} \rangle$. Multiwektor $\mathbf{e}_i = e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}}$ jest zatem multiwektorem najwyższego stopnia wewnątrz $T\mathcal{F}_i^c$, a więc

wiązka liniowa generowana przez ten wektor to nic innego jak *wiązka wyznacznikowa* $\det T\mathcal{F}_i^c$. Dotychczasową dyskusję można zatem podsumować następującą definicją oraz stwierdzeniem.

Stwierdzenie/Definicja 2.9. *Działanie koneksji Θ zgodnej (\mathcal{W}, Ω) na $\mathcal{X}(M)$ indukuje jednoznacznie wyznaczoną koneksję liniową ω na sumie prostej wiązek wyznacznikowych $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$, której postać nie zależy od wyboru Θ . Koneksję tą nazwiemy koneksją kanoniczną pary (\mathcal{W}, Ω) . \square*

Uwaga. Przy dodatkowym założeniu, że \mathcal{W} jest tkaniną kowymiaru 1, wiązki wyznacznikowe $\det T\mathcal{F}_i^c$ stają się identyczne z $T\mathcal{F}_i^c$. To pozwala nam utożsamić (w tym wypadku jednoznacznie wyznaczoną) koneksję Θ zgodną z (\mathcal{W}, Ω) z koneksją kanoniczną ω pary (\mathcal{W}, Ω) .

Podobnie jak w akapicie poprzedzającym Stwierdzenie 2.5 definiujemy cofnięcie koneksji wzdłuż lokalnego izomorfizmu wiązek $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ opuszczającego się do lokalnego dyfeomorfizmu odpowiednich przestrzeni bazowych $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$. Jeżeli $\mathbf{e}^* = (\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ jest koreperem na E_2 oraz ω jest koneksją na E_2 o macierzy 1-form $\omega = [\omega_k^j]$ w koreperze \mathbf{e}^* , to macierzą *cofnięcia* $\psi^*\omega$ koneksji ω wzdłuż ψ w koreperze $\psi^*\mathbf{e}^* = (\psi^*\mathbf{e}_1^*, \psi^*\mathbf{e}_2^*, \dots, \psi^*\mathbf{e}_n^*)$ jest macierz $\omega^* = [(\omega^*)^j_k]$, gdzie $(\omega^*)^j_k = \varphi^*\omega_k^j$.

Stwierdzenie 2.10. *Niech $\varphi : M \rightarrow N$ będzie lokalną równoważnością tkanin $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ oraz $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n)$ określonych na (M, Ω) , (N, η) odpowiednio. Wtedy odwzorowanie $d\varphi : TM \rightarrow TN$ indukuje lokalny izomorfizm wiązek $\psi : \bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{G}_i^c$. Ponadto, jeżeli ω jest kanoniczną koneksją tkaniny (\mathcal{W}_2, η) , to $\psi^*\omega$ jest kanoniczną koneksją tkaniny (\mathcal{W}_1, Ω) .*

Dowód. Z definicji równoważności tkanin $d\varphi(T\mathcal{F}_i) = T\mathcal{G}_{\sigma(i)}$ dla pewnej permutacji $\sigma \in S_n$, a więc również

$$d\varphi(T\mathcal{F}_i^c) = d\varphi\left(\bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j\right) = \bigcap_{j \neq i} d\varphi(T\mathcal{F}_j) = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{G}_{\sigma(j)} = T\mathcal{G}_{\sigma(i)}^c. \quad (2.1.34)$$

Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.8 mamy $TM = \bigoplus_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c$ oraz $TN = \bigoplus_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c$, a więc z (2.1.34) otrzymujemy $d\varphi = \bigoplus_{i=1}^n d\varphi|_{T\mathcal{F}_i^c}$. Przekształcenie to indukuje na wiązkach wyznacznikowych odwzorowanie $\psi = \bigoplus_{i=1}^n \det d\varphi|_{T\mathcal{F}_i^c}$, którego składniki działają na $\det T\mathcal{F}_i^c$ poprzez $\det d\varphi|_{T\mathcal{F}_i^c}(v_1 \wedge \dots \wedge v_{c_i}) = d\varphi(v_1) \wedge \dots \wedge d\varphi(v_{c_i})$ dla $v_1, \dots, v_{c_i} \in T\mathcal{F}_i^c$ oraz $c_i = \text{codim } \mathcal{F}_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wzór ten pokazuje również, że obcięcie odwzorowania

ψ do włókien wiązki, na której jest ono określone, jest izomorfizmem liniowym, ponieważ tą samą własność ma $d\varphi$. To dowodzi, że ψ jest lokalnym izomorfizmem wiązek.

Założmy, że działanie ω na $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$ jest indukowane przez działanie koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}_2, η) na TN . Przyjmijmy również, że $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ jest (\mathcal{W}_2, η) -koreperem, podczas gdy $\theta = [\theta_k^j]$ jest macierzą koneksji Θ w koreperze ξ . Wtedy układ $\Xi = (\Xi^1, \dots, \Xi^n)$ złożony z form $\Xi^j = \xi^{m_j+1} \wedge \dots \wedge \xi^{m_{j+1}}$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$, jest koreperem wiązki $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{G}_i^c$. Zgodnie ze wzorem (2.1.24), macierz $\omega = [\omega_k^j]$ koneksji ω w koreperze Ξ składa się z elementów

$$\omega_i^i = \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \theta_k^i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{oraz} \quad \omega_j^i = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (2.1.35)$$

Stosując cofnięcie φ^* do koreperu ξ i powyższych tożsamości uzyskujemy, że zgodnie z definicją odwzorowania ψ macierzą $\omega^* = [(\omega^*)_k^j]$ koneksji $\psi^*\omega$ w koreperze $\psi^*\Xi = (\psi^*\Xi^1, \dots, \psi^*\Xi^n)$, gdzie $\psi^*\Xi^i = \varphi^*\xi^{m_i+1} \wedge \dots \wedge \varphi^*\xi^{m_{i+1}}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, jest macierz złożona z elementów

$$(\omega^*)_i^i = \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \varphi^*\theta_k^i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{oraz} \quad (\omega^*)_j^i = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (2.1.36)$$

Stąd wnioskujemy, że działanie $\psi^*\omega$ na $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$ jest indukowane przez działanie koneksji $\varphi^*\Theta$, która jest zgodna z (\mathcal{W}_1, Ω) dzięki Stwierdzeniu 2.5. Zatem $\psi^*\omega$ jest koneksją kanoniczną pary (\mathcal{W}_1, Ω) z Definicji 2.9. \square

Poniższy wynik pokazuje, że postać koneksji kanonicznej pary (\mathcal{W}, Ω) pozwala w pełni scharakteryzować te spośród beztorsyjnych koneksji afinicznych, które są zgodne z (\mathcal{W}, Ω) .

Stwierdzenie 2.11. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . Beztorsyjna koneksja afiniczna Θ na M jest zgodna z (\mathcal{W}, Ω) wtedy i tylko wtedy, gdy jej działanie na wiązce $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$ jest dobrze określone i identyczne z działaniem koneksji kanonicznej ω pary (\mathcal{W}, Ω) .*

Dowód. Jeżeli Θ jest zgodna z (\mathcal{W}, Ω) , to działanie Θ na $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$ pokrywa się z działaniem ω z definicji. By dowieść implikacji przeciwnej, założmy że $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ jest (\mathcal{W}, Ω) -koreperem, a $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ jego reperem dualnym. Przyjmijmy dodatkowo $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$. Koneksja $\Theta = [\theta_k^j]$ działa na multiwektorach $\mathbf{e}_i = e_{m_i+1} \wedge \dots \wedge e_{m_{i+1}} \in \Gamma(\det T\mathcal{F}_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ przy pomocy swojej pochodnej kowariantnej ∇ zgodnie ze wzorem (2.1.23). Działanie to zgadza się

z działaniem koneksji kanonicznej ω wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona równa jest $(\sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \tilde{\theta}_k^k) \otimes e_i$, dla pewnej koneksji $\tilde{\Theta}$ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) o macierzy $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_k^j]$ w koreperze ξ . Porównując te dwa wyrażenia otrzymujemy: (1) $\theta_k^j = 0$ dla $j \not\sim k$ przy wykorzystaniu notacji z (2.1.4), oraz (2) $\sum_{k=1}^m \theta_k^k = \sum_{k=1}^m \tilde{\theta}_k^k = 0$. Ponieważ ξ jest (\mathcal{W}, Ω) -koreperem, te dwa warunki odpowiadają warunkom (1) oraz (2) z Definicji 2.3 odpowiednio, co w połączeniu z beztorsyjnością koneksji Θ dowodzi tezy twierdzenia. \square

Uwaga. Powyższa równoważność przestaje być prawdziwa, gdy w jej sformułowaniu zastąpimy beztorsyjne koneksje afiniczne przez ogólne (niekoniecznie beztorsyjne) koneksje afiniczne, ponieważ istnieją 1-formy $\theta_j^k = \sum_i \Gamma_{ij}^k \xi^i$ ze współczynnikami Γ_{ij}^k , które nie są symetryczne względem indeksów i, j , lecz mimo to spełniają $\theta_j^k = 0$ dla $j \not\sim k$ oraz $\sum_k \theta_k^k = 0$ w notacji z (2.1.4).

Naszkiujemy jeszcze związek między pojęciem koneksji kanonicznej pary (\mathcal{W}, Ω) , gdzie $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ jest 2-tkaniną na (M, Ω) , oraz pojęciem koneksji Tabachnikova 2-tkaniny bezdywergencyjnej $(M, \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ (Definicja 1.5). Wykazane poniżej stwierdzenie mówi w szczególności, że te dwa pojęcia pokrywają się. Na tej podstawie można orzec, że koneksja kanoniczna stanowi naturalne uogólnienie koneksji Tabachnikova na przypadek tkanin o większej ilości foliacji.

Stwierdzenie 2.12. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) oraz niech $i = 1, 2, \dots, n$. Oznaczmy przez \mathcal{F}_i^c foliację generowaną przez dystrybucję styczną $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j$. Pochodna kowariantna $D^i : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\det T\mathcal{F}_i^c) \rightarrow \Gamma(\det T\mathcal{F}_i^c)$ obcięcia koneksji kanonicznej ω pary (\mathcal{W}, Ω) do wiązki $\det T\mathcal{F}_i^c$ to dokładnie koneksja Tabachnikova ∇^i tkaniny bezdywergencyjnej $(M, \mathcal{F}_i^c, \mathcal{F}_i, \Omega)$ (Definicja 1.5).*

Dowód. Niech $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ będzie (\mathcal{W}, Ω) -koreperem, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ reperem dualnym do ξ , oraz niech $j \sim k$ będzie relacją równoważności na zbiorze indeksów $\{1, 2, \dots, m\}$ określoną przez (2.1.4). Wybierzmy koneksję Θ zgodną z (\mathcal{W}, Ω) o macierzy $\theta = [\theta_k^j]$ w koreperze ξ . Oznaczmy przez $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ jej pochodną kowariantną. Własność (1) z Definicji 2.3 oznacza, że dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, n$ oraz $X = \sum_{k \not\sim j} X^k e_k \in \Gamma(T\mathcal{F}_j)$ pola wektorowe $D_V X = \sum_{k \not\sim j} (V X^k) e_k + \sum_{l \not\sim j} \sum_k \theta_l^k (V) X^l e_k$ również leżą w $\Gamma(T\mathcal{F}_j)$. Ponieważ $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j$, powyższe zdanie pozostanie prawdziwe, gdy $T\mathcal{F}_j$ zastąpimy przez $T\mathcal{F}_i^c$. Ponieważ Θ jest beztorsyjna, dla dowolnych $X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)$

oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_i^c)$, otrzymujemy

$$D_X Y = (D_X Y)_{\mathcal{F}_i^c} = (D_X Y)_{\mathcal{F}_i^c} - (D_Y X)_{\mathcal{F}_i^c} = [X, Y]_{\mathcal{F}_i^c} = D_X^{\mathcal{F}_i^c} Y, \quad (2.1.37)$$

gdzie odwzorowanie $v \mapsto v_{\mathcal{F}_i^c}$ to rzutowanie z $TM = T\mathcal{F}_i \oplus T\mathcal{F}_i^c$ na $T\mathcal{F}_i^c$ wzdłuż $T\mathcal{F}_i$.

Niech teraz $\mu_i : \det T\mathcal{F}_i^c \rightarrow \det T^*\mathcal{F}_i$ będzie izomorfizmem wiązek danym przez $\mu_i(\eta) = \eta \lrcorner \Omega$. Zgodnie z uwagą następującą po Definicji 2.3, własność (2) jest równoważna $D\Omega = 0$, co natychmiast prowadzi do $D_Y(\eta \lrcorner \Omega) = (D_Y \eta) \lrcorner \Omega$ dla każdego $Y \in \mathfrak{X}(M)$ oraz $\eta \in \det T\mathcal{F}_i^c$ dzięki regule Leibniza zastosowanej do lewej strony równości. Wykazane w poprzednim akapicie zawieranie $D_Y \Gamma(T\mathcal{F}_i^c) \subseteq \Gamma(T\mathcal{F}_i^c)$ sprawia, że tożsamość powyżej można zapisać krócej jako $D_Y \circ \mu_i = \mu_i \circ D_Y$ dla każdego $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Niech $\mathcal{G} = \mathcal{F}_i^c$ oraz $\mathcal{H} = \mathcal{F}_i$. Korzystając z przemienności D z μ_i oraz z równości (2.1.37) zastosowanej do ustalonego multiwektora $\eta \in \Gamma(\det T\mathcal{F}_i^c)$ przy pomocy reguły Leibniza uzyskujemy

$$\begin{aligned} D_X \eta &= D_{X_{\mathcal{G}}} \eta + D_{X_{\mathcal{H}}} \eta \\ &= \mu_i^{-1} D_{X_{\mathcal{G}}}(\mu \eta) + D_{X_{\mathcal{H}}} \eta \\ &= \mu_i^{-1} D_{X_{\mathcal{G}}}^{\mathcal{G}}(\mu \eta) + D_{X_{\mathcal{H}}}^{\mathcal{H}} \eta \stackrel{(1.2.17)}{=} \nabla_{X_{\mathcal{H}}}^i \eta, \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

gdzie $X = X_{\mathcal{G}} + X_{\mathcal{H}}$ dla $X_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$ oraz $X_{\mathcal{H}} \in \Gamma(T\mathcal{H})$. Ponieważ działanie koneksji kanonicznej ω na $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$ to dokładnie działanie pochodnej D na wiązkach wyznacznikowych, które ze Stwierdzenia 2.10 nie zależy od wyboru Θ , powyższa równość wienczy dowód. \square

2.1.3 Postać koneksji we współrzędnych

Ustalmy układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) prostujący tkaninę \mathcal{W} , w którym kolejne foliacje $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ zadanej n -tkaniny generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_i+1} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$. Taki układ współrzędnych istnieje dzięki Stwierdzeniu 1.1. Dowolna forma objętości Ω wyraża się w nim przez $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ dla pewnej nigdzie nieznikającej funkcji gładkiej $h \in C^\infty(M)$. Naszym celem jest odnalezienie jawnego wzoru na 1-formy ω_k^j koneksji kanonicznej ω pary (\mathcal{W}, Ω) w tych współrzędnych z wykorzystaniem gęstości $h(x)$.

W tym celu wybierzmy (\mathcal{W}, Ω) -koreper $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$ i odnajdźmy przy jego pomocy macierz $\theta = [\theta_k^j]$ dowolnej beztorsyjnej koneksji afinicznej Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) .

Przyjmując przykładowo $\xi^j = dx_j$ dla $j = 1, 2, \dots, m-1$ oraz $\xi^m = h(x) dx_m$ czynimy za-
dość warunkom (a) oraz (b) z Definicji 2.1. Idąc za dowodem Stwierdzenia 2.4 uzyskujemy
kolejno

$$\begin{aligned} \alpha_k^j &= 0 & \text{dla } j \neq k, & & \beta &= d \log|h|, \\ \alpha_j^j &= 0 & \text{dla } j = 1, \dots, m-1, & & f_k(x) &= \frac{\partial \log|h|}{\partial x_k}(x) \quad \text{dla } k = 1, \dots, m-1, \\ \alpha_m^m &= d \log|h|, & & & f_m(x) &= \frac{1}{h(x)} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_m}(x). \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

Wstawiając to do wzoru (2.1.8) otrzymujemy

$$\theta_k^j = \begin{cases} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_j} \cdot \xi^j & \text{jeżeli } j = k \neq m, \\ -d \log|h| + \frac{1}{h} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_m} \cdot \xi^m & \text{jeżeli } j = k = m, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2.1.40)$$

Macierz ta jest macierzą pewnej beztorsyjnej koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) w koreperze ξ .
Wykorzystamy tę koneksję do obliczenia macierzy koneksji kanonicznej ω we współrzęd-
nych. Wprowadźmy oznaczenia $m_1 = 0$, $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim } \mathcal{F}_k$ oraz $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j^c$ dla
 $i = 1, 2, \dots, n$, a następnie rozpatrzmy koreper $\Xi = (\Xi_1, \dots, \Xi_n)$ wiązki $\bigoplus_{i=1}^n \det T\mathcal{F}_i^c$
o elementach $\Xi_i = \xi_{m_{i+1}} \wedge \dots \wedge \xi_{m_i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Stosując równość (2.1.24) do
reperu $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ dualnego do Ξ otrzymujemy, że macierzą koneksji kanonicznej ω
w koreperze Ξ jest macierz $\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}_j^i]$, gdzie

$$\tilde{\omega}_j^i = \begin{cases} \sum_{k=m_{i+1}}^{m_{i+1}} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_k} dx_k & \text{jeżeli } i = j \neq n, \\ -d \log|h| + \sum_{k=m_n+1}^m \frac{\partial \log|h|}{\partial x_k} dx_k & \text{jeżeli } i = j = n, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2.1.41)$$

Zmieńmy teraz koreper Ξ na koreper $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ indukowany przez standardowy
koreper współrzędnościowy $(dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$. Składa się on z form $d\mathbf{x}_i = dx_{m_{i+1}} \wedge \dots \wedge$
 dx_{m_i+1} dla $i = 1, 2, \dots, n$, a zatem macierz przejścia $Q = [Q_j^i]$ między Ξ a $d\mathbf{x}$ określona
przez relację $\Xi^i = \sum_j Q_j^i d\mathbf{x}^j$ będzie macierzą diagonalną $Q = \text{diag}(1, \dots, 1, h(x))$. Posłu-
gując się wzorem (2.1.2) otrzymujemy wzór jawny na macierz ω koneksji ω w koreperze
współrzędnościowym $d\mathbf{x}$ postaci

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^n \end{pmatrix}, \quad (2.1.42)$$

gdzie

$$\omega_i^i = \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_k}(x) dx_k \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.43)$$

Mając 1-formy koneksji ω , nietrudno jest odzyskać macierz 2-form krzywizny tejże koneksji, którą oznaczmy symbolem Ψ . Posłuży nam do tego wzór Cartana opisujący elementy Ψ_j^i tej macierzy [47, Chapter 8, 16.]

$$\Psi_j^i = d\omega_j^i + \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.44)$$

który w naszym przypadku zwraca

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Psi_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Psi_n^n \end{pmatrix}, \quad (2.1.45)$$

gdzie

$$\Psi_j^i = d\omega_j^i = \sum_{j \neq i} \left(\sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}} \frac{\partial \log|h|}{\partial x_k \partial x_l}(x) dx_l \wedge dx_k \right). \quad (2.1.46)$$

Z powyższego wzoru na formy krzywizny możemy wyciągnąć następujący wniosek.

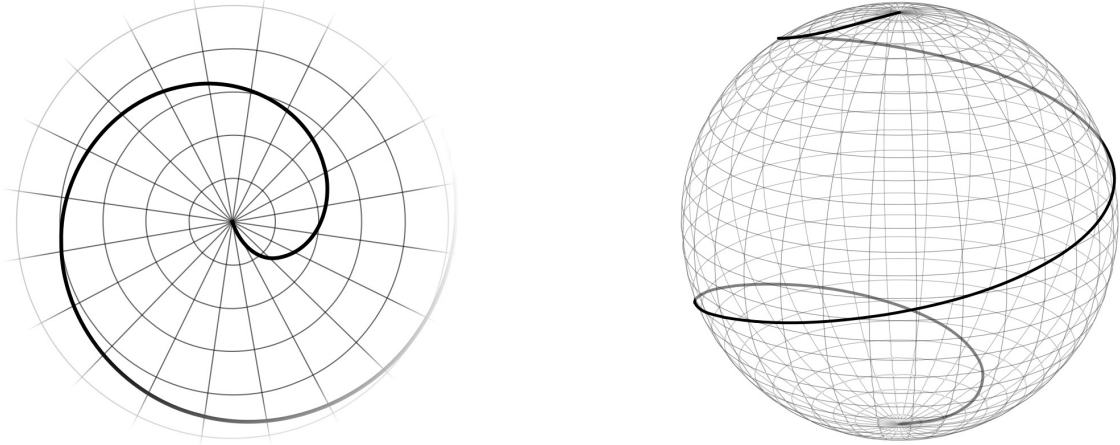
Twierdzenie 2.13. *Tkanina \mathcal{W} określona na (M, Ω) jest lokalnie trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy koneksja kanoniczna ω pary (\mathcal{W}, Ω) jest płaska.*

Dowód. Zauważmy, że ze wzoru (2.1.46) 2-formy krzywizny Ψ_j^i koneksji ω znikają całkowicie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są założenia Twierdzenia 1.2. \square

2.1.4 Przykłady

Przykład 2.1. Niech $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\Omega = dx \wedge dy$, oraz niech \mathcal{F}, \mathcal{G} będą foliacjami M złożonymi odpowiednio ze wszystkich półprostych o początku w punkcie 0 oraz wszystkich okręgów o środku w punkcie 0. Wtedy 2-tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określona na (M, Ω) jest lokalnie trywialna. Za lokalną równoważność tkanin φ trywializującą \mathcal{W} można przyjąć nakrycie $\pi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow M; (\rho, \phi) \mapsto (\sqrt{2\rho} \cos \phi, \sqrt{2\rho} \sin \phi)$.

Odwzorowanie π przenosi proste na geodezyjne koneksji kanonicznej ω pary (\mathcal{W}, Ω) , co wynika wprost ze Stwierdzenia 2.10. We współrzędnych biegunowych (r, ϕ) geodezyjne te dane są równaniami $ar^2 + b\phi = c$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ – mamy więc do czynienia ze *spiralami Fermata* (Rysunek 2.1). Gdy uwzględnimy parametryzację, generyczną spiralę Fermata



Rysunek 2.1: Tkaniny \mathcal{W} wymiaru 2 ze standardowymi formami objętości Ω oraz geodezyjne ich koneksji kanonicznych. Po lewej: tkanina na płaszczyźnie złożona z poziomicy współrzędnych biegunowych. Geodezyjne to spirale Fermata $ar^2 + b\phi = c$, gdzie r, ϕ to odpowiednio współrzędna radialna i kątowa. Po prawej: tkanina zadana przez krzywe stałych szerokości i długości geograficznych na S^2 bez biegunów. Geodezyjnymi są tu spirale sferyczne dane równaniami $az + b\phi = c$ we współrzędnych walcowych (z, ϕ) .

$\gamma(t)$ można scharakteryzować przy pomocy ω jako jedyną krzywą o zadanej prędkości początkowej $\dot{\gamma}(0)$, której (1) prędkość kątowa $\dot{\gamma}_{\mathcal{G}}$ względem początku układu współrzędnych jest stała, oraz (2) taką, że wraz z biegiem czasu $t \in \mathbb{R}$ pole $\Omega(\dot{\gamma}_{\mathcal{F}}, \dot{\gamma}_{\mathcal{G}})$ infinitezimalnego prostokąta rozpiętego przez rzuty $\dot{\gamma}_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}, \dot{\gamma}_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$ określone przez $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\mathcal{F}} + \dot{\gamma}_{\mathcal{G}}$ pozostaje stałe.

Przykład 2.2. Niech M będzie 2-sferą jednostkową $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ z wyciętym biegunem północnym i południowym $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1) \in S^2$. Niech \mathcal{F}, \mathcal{G} będą foliacjami M złożonymi odpowiednio równoleżników $z = c \in \mathbb{R}$ i południków $ax + by = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq 0$. Oznaczmy przez Ω riemannowską formę objętości $x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ indukowaną z \mathbb{R}^3 . Tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określona na (M, Ω) jest lokalnie trywialna. Globalnym układem współrzędnych prostującym tkaninę \mathcal{W} jest układ współrzędnych walcowych (ϕ, z) , gdzie z to liniowa współrzędna wzdłuż osi północ-południe, podczas gdy ϕ to długość geograficzna danego punktu na sferze. Geodezyjne koneksji kanonicznej ω można wskazać w ten sam sposób, co w poprzednim przykładzie (Przykład 2.1). Są to spirale sferyczne dane równaniami $az + b\phi = c$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Rysunek 2.1).

Krzywe te posiadają własność zbliżoną do tej, z której słyną spirale Fermata. Zauważmy, że pojedyncza geodezyjna transwersalna do obu foliacji wraz z ustalonym południkiem dzieli sferę na czworoboczne paski. Okazuje się, że wszystkie powstałe w ten

sposób paski, które dodatkowo nie stykają się z biegunami, mają te same pola powierzchni. Fakt ten łatwo dostrzec we współrzędnych walcowych (ϕ, z) , w których forma objętości przyjmuje postać $\Omega = d\phi \wedge dz$.

2.1.5 Tensor niejednorodności

Pojęcie koneksji zgodnej z parą (\mathcal{W}, Ω) , gdzie \mathcal{W} jest n -tkaniną na rozmaitości M wyposażonej w formę objętości Ω , pozwala nam podać interpretację tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny \mathcal{W} względem Ω (Definicja 1.3) w oparciu o dobrze znane obiekty różniczkowo-geometryczne.

Twierdzenie 2.14. *Niech \mathcal{W} będzie n -tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) . Tensor Ricciego Rc koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) jest równy tensorowi niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$.*

Dowód. Wybierzmy układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_n) , w którym foliacje $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ tkaniny \mathcal{W} spełniają $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Współczynniki tensora krzywizny Riemanna R_{ijk}^j w repere współrzędnościowym $\mathcal{E} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ zapisane przy pomocy 2-formy krzywizny Ψ (2.1.46) wynoszą

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l &= \Psi_l^k(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{kl} \sum_{m \neq k} \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_k \partial x_m} (\delta_{mi} \delta_{kj} - \delta_{mj} \delta_{ki}) \\ &= \delta_{kl} \left((1 - \delta_{ki}) \delta_{kj} \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_k \partial x_i} - (1 - \delta_{kj}) \delta_{ki} \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_k \partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

gdzie δ_{ij} to delta Kroneckera. By obliczyć tensor Ricciego, dokonajmy kontrakcji drugiego spośród dolnych indeksów z górnym. W rezultacie otrzymujemy

$$\text{Rc}_{ik} = \sum_j R_{ijk}^j = (1 - \delta_{ki}) \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_k \partial x_i}. \quad (2.1.48)$$

Wyrażenie powyżej jest symetryczne w dolnych indeksach i wynosi 0 jeżeli indeksy są sobie równe. Przepisując powyższy tensor z wykorzystaniem iloczynu symetrycznego dostajemy ostatecznie

$$\text{Rc} = \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j = \mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega). \quad \square \quad (2.1.49)$$

Wniosek 2.15. *Dla zadanej n -tkaniny \mathcal{W} kowymiaru 1 określonej na (M, Ω) z ustaloną koneksją Θ zgodną z (\mathcal{W}, Ω) następujące własności są równoważne.*

- (1) \mathcal{W} jest lokalnie trywialna.
- (2) Θ jest płaska.
- (3) Θ jest Ricci-płaska, tj. $\text{Rc} = 0$, gdzie Rc jest tensorem Ricciego koneksji Θ . □

Wyniki te, pomimo, że dotyczą jedynie tkanin kowymiaru 1, można z powodzeniem przekuć w charakteryzację tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ względem formy objętości Ω tkaniny \mathcal{W} dowolnego, niekoniecznie stałego kowymiaru.

Poszlaki wskazujące na tę możliwość są wyjątkowo dobrze widoczne we współrzędnych prostujących tkaninę. W przypadku tkaniny \mathcal{W} kowymiaru 1 określonej na (M, Ω) , Twierdzenie 2.14 oraz Definicja 1.3 wskazują, że tensor Ricciego Rc koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) zawiera w sobie całą informację obecną w tensorze niejednorodności nie tylko tkaniny \mathcal{W} , ale również tensorów niejednorodności wszystkich tkanin $\mathcal{W}_\pi = (\mathcal{F}_{\pi_1}, \dots, \mathcal{F}_{\pi_n})$ powstałych przez wzięcie dowolnego podziału $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ zbioru indeksów $\{1, 2, \dots, m\}$ oraz utworzeniu przy jego pomocy foliacji \mathcal{F}_{π_i} generowanych przez całkowalne dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_{\pi_i} = \bigcap_{j \in \pi_i} T\mathcal{F}_j$, które razem tworzą tkaninę za sprawą Stwierdzenia 2.8. W szczególności, porównując wyrażenia współrzędnościowe okazuje się, że Rc zapisuje się jako suma $\mathcal{K}(\mathcal{W}_\pi, \Omega)$ oraz pewnego „blokowo-diagonalnego” składnika, przy czym rozkład ten okazuje się być niezmienniczy ze względu na grupę auto-równoważności tkaniny \mathcal{W}_π . Nasuwa się więc następująca strategia: dla dowolnej n -tkaniny \mathcal{W} na (M, Ω) wykorzystajmy pomocniczą tkaninę $\tilde{\mathcal{W}}$ kowymiaru 1 i opiszmy $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ jako jeden z niezmienniczych składników tensora Ricciego koneksji zgodnej z $\tilde{\mathcal{W}}$.

Strategia ta prowadzi ostatecznie do oczekiwanego wyniku. W poniższym lemacie zbadamy przy pomocy Lematu 2.6 zbiór tensorów Ricciego Rc wszystkich koneksji Θ zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) . W trakcie obliczeń stanie się jasne, że pewne współczynniki Rc wewnątrz ustalonego układu współrzędnych prostującego tkaninę \mathcal{W} nie zmieniają się, gdy zastąpimy koneksję Θ jej sperturbowanym wariantem.

Lemat 2.16. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . W dowolnym układzie współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) spełniającym $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_j$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, tensor Ricciego Rc dowolnej koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) spełnia*

$$\text{Rc}_{kl}(x) = \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_k \partial x_l}(x), \quad (2.1.50)$$

dla wszystkich $i \neq j$, $m_i < k \leq m_{i+1}$ oraz $m_j < l \leq m_{j+1}$.

Dowód. Ustalmy koneksję Θ zgodną z (\mathcal{W}, Ω) oraz tensor różnicowy D opisany przez Lemat 2.6. Tym dwóm obiektom odpowiadają macierze $\theta = [\theta_k^j]$ oraz $\Delta = [\Delta_k^j]$ w koreperze współrzędnościowym $\xi = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$, gdzie $\Delta_k^j = \sum_i D_{ij}^k dx_i$. Oznaczmy tensory

krzywizny Riemanna odpowiadające koneksjom Θ oraz $\Theta + D$ przez R, \tilde{R} odpowiednio. Posługując się symbolami Christoffela $\Gamma_{ij}^k = \theta_j^k(\frac{\partial}{\partial x_i})$ koneksji Θ docieramy poprzez bezpośredni rachunek do następującej tożsamości (wyrażonej z użyciem konwencji sumacyjnej Einsteina dla prostoty) prawdziwej dla każdej czwórki indeksów $i, j, k, l = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ikj}^l &= R_{ikj}^l + \frac{\partial}{\partial x_i} D_{kj}^l - \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ij}^l \\ &\quad + D_{im}^l \Gamma_{kj}^m - D_{km}^l \Gamma_{ij}^m \\ &\quad + \Gamma_{im}^l D_{kj}^m - \Gamma_{km}^l D_{ij}^m \\ &\quad + D_{im}^l D_{kj}^m - D_{km}^l D_{ij}^m. \end{aligned} \tag{2.1.51}$$

Kontrakcja indeksu k z indeksem l zwróci nam równość wiążącą odpowiadające Θ i $\Theta + D$ tensory Ricciego Rc oraz $\tilde{R}c$. Dzięki tożsamości $\text{tr } \iota_v D = 0$ dla $v \in TM$ będącej treścią punktu (3) Lematu 2.6 oraz symetrii D w dolnych indeksach, kontrakcje drugiego, piątego i ostatniego składnika znikną, pozostawiając

$$\tilde{R}c_{ij} = Rc_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ij}^k + D_{im}^k \Gamma_{kj}^m + \Gamma_{im}^k D_{kj}^m + D_{im}^k D_{kj}^m - \Gamma_{km}^k D_{ij}^m. \tag{2.1.52}$$

Aby wykazać, że wyrażenie to redukuje się do $\tilde{R}c_{ij} = Rc_{ij}$, określmy relację $j \sim k$ zgodnie z (2.1.4) i zauważmy, że $\Gamma_{ij}^k = 0$ jeżeli: (1) $j \not\sim k$ z warunku (1) Definicji 2.3; (2) $i \not\sim k$ dzięki symetrii Γ_{ij}^k w dolnych indeksach, która jest równoważna beztorsyjności koneksji Θ (3) $i \not\sim j$ łącząc dwa powyższe przypadki. To samo dotyczy D_{ij}^k , ponieważ tensor D jest różnicą symboli Christoffela Γ and $\tilde{\Gamma} = \Gamma + D$ dwóch koneksji zgodnych z (\mathcal{W}, Ω) . Stąd wynika, że jedyne niezerowe współczynniki obiektów D_{ij}^k oraz Γ_{ij}^k to te o indeksach spełniających $i \sim j \sim k$. Zastosowanie tego spostrzeżenia do (2.1.52) prowadzi natychmiast do szukanej równości $\tilde{R}c_{ij} = Rc_{ij}$ dla wszystkich $i \not\sim j$.

Pozostaje wyznaczyć wartość Rc_{ij} w dowolnym punkcie $p \in U$ wewnątrz ustalonego wcześniej układu współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) o dziedzinie otwartej U . Niech Θ będzie (jednoznacznie wyznaczoną) koneksją zgodną z $(\tilde{\mathcal{W}}, \Omega)$, gdzie $\tilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m)$ jest tkaniną kowymiaru 1 określoną na (M, Ω) , której kolejne foliacje \mathcal{G}_i generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{G}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Ponieważ $(\tilde{\mathcal{W}}, \Omega)$ -koreper ξ jest również (\mathcal{W}, Ω) -koreperem, podczas gdy macierz koneksji θ w koreperze ξ spełnia warunki (1) oraz (2) z Definicji 2.3 również w odniesieniu do pary (\mathcal{W}, Ω) , koneksja Θ jest zgodna z (\mathcal{W}, Ω) na U . Dzięki temu argument oparty o rozkład jedności podobny do tego, który występuje w dowodzie Stwierdzenia 2.4, pozwala nam rozszerzyć ją do koneksji globalnej zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) tożsamej z Θ na domknięciu $\bar{V} \subseteq U$ zbioru otwartego V dobranego tak,

aby $p \in V$ [31, Theorem 2.1]. Koneksję tę oznaczmy tym samym symbolem Θ . Stąd, że Θ jest zgodna jednocześnie z $(\tilde{\mathcal{W}}, \Omega)$ jak i (\mathcal{W}, Ω) wewnątrz zbioru V , współczynniki tensora Ricciego w koreperze współrzędnościowym określone są przez tezę Twierdzenia 2.14 opisującego tensor Rc koneksji Θ zgodnej z tkaniną kowymiaru 1 i wynoszą $\text{Rc}_{jk} = \frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_j \partial x_k}$ dla $j \not\sim k$. Zgodnie z poprzednim akapitem nie zależą one od wyboru koneksji zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) , co finalnie dowodzi tezy. \square

Rozkład wiązki stycznej $TM = \bigoplus_{i=1}^n T\mathcal{F}_i^c$ opisany w Stwierdzeniu 2.8, gdzie $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j$, pozwala nam rozłożyć wiązkę kowariantnych 2-tensorów symetrycznych $S^2(M)$ na sumę Whitneya dwóch podwiązek:

$$\begin{aligned} S_D^2(M) &= \left\{ A \in S^2(M) : \forall_{i \neq j} \forall_{v \in T\mathcal{F}_i^c} \forall_{w \in T\mathcal{F}_j^c} A(v, w) = 0 \right\}, \\ S_O^2(M) &= \left\{ A \in S^2(M) : \forall_j \forall_{v, w \in T\mathcal{F}_j^c} A(v, w) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.53)$$

Wiązki te są niezmiennicze ze względu na lokalne równoważności tkanin. Istotnie, jeżeli $\varphi : M \rightarrow N$ jest lokalną równoważnością tkanin $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ oraz $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n)$ określonych na (M, Ω) , (N, Ω) odpowiednio, to $d\varphi(T\mathcal{F}_i) = T\mathcal{G}_{\sigma(i)}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz pewnej permutacji $\sigma \in S_n$. Stąd jeśli $A \in S_D^2(N)$, to $(\varphi^*A) \in S_D^2(M)$, gdyż $(\varphi^*A)(v, w) = A(d\varphi(v), d\varphi(w)) = 0$ dla $v \in T\mathcal{F}_i^c$ oraz $w \in T\mathcal{F}_j^c$ przy $i \neq j$, co wynika z $d\varphi(v) \in T\mathcal{G}_{\sigma(i)}^c$, $d\varphi(w) \in T\mathcal{G}_{\sigma(j)}^c$ oraz $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Podobnie, jeżeli $A \in S_O^2(N)$ to $\varphi^*A \in S_O^2(M)$, gdyż dla $v, w \in T\mathcal{F}_i^c$ mamy $\varphi^*A(v, w) = A(d\varphi(v), d\varphi(w)) = 0$, co wynika wprost z $d\varphi(v), d\varphi(w) \in T\mathcal{G}_{\sigma(i)}^c$ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$. To daje $\varphi^*S_D^2(N) \subseteq S_D^2(M)$ oraz $\varphi^*S_O^2(N) \subseteq S_O^2(M)$. Zawierania przeciwne wynikają z lokalnej odwracalności φ .

Rozkład ten określa dwa rzutowania

$$\begin{aligned} \text{pr}_D : S^2(M) &= S_D^2(M) \oplus S_O^2(M) \rightarrow S_D^2(M), \\ \text{pr}_O : S^2(M) &= S_D^2(M) \oplus S_O^2(M) \rightarrow S_O^2(M). \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

Ponieważ koneksja Θ zgodna z (\mathcal{W}, Ω) jest beztorsyjna oraz paralelizuje formę objętości Ω , jej tensor Ricciego jest symetryczny [41, Chapter I, Proposition 3.1]. Stosując zatem powyższy rozkład otrzymujemy charakteryzację tensora niejednorodności względem Ω tkaniny \mathcal{W} dowolnego kowymiaru.

Twierdzenie 2.17. *Niech \mathcal{W} będzie n -tkaniną na (M, Ω) , oraz niech Rc oznacza tensor Ricciego dowolnej koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}, Ω) . Wtedy*

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) = \text{pr}_O(\text{Rc}). \quad (2.1.55)$$

Dowód. Przez zestawienie Definicji 1.3 z Lematem 2.16. \square

2.2 Zagadnienie klasyfikacyjne

Główny motyw tej części pracy to próba odpowiedzi na pytanie: czy uzyskane wcześniej niezmienniki krzywiznowe umożliwiają nam dokonanie lokalnej klasyfikacji tkanin w geometrii unimodularnej, tj. co do działania grupy (kielek) dyfeomorfizmów $\varphi : M \rightarrow M$ zachowujących daną na M formę objętości Ω ?

W tak postawionym problemie klasyfikacyjnym istotne okazuje się być Stwierdzenie 1.1 mówiące, że każdy tkanina jest lokalnie równoważna tkaninie postaci $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ określonej na \mathbb{R}^m o współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) z formą objętości $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$, której foliacje \mathcal{F}_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_j$, gdzie $0 = m_1 < m_2 < \dots < m_n < m_{n+1} = m$ są pewnymi liczbami naturalnymi. Stwierdzenie to pozwala zredukować postawiony problem do prostszego zagadnienia na \mathbb{R}^m .

Twierdzenie 2.18. *Niech (M, Ω) będzie rozmaitością gładką wyposażoną w formę objętości Ω , oraz niech $p \in M$. Ustalmy liczby c_1, \dots, c_n spełniające $\sum_{k=1}^n c_k = m$. Zagadnienie klasyfikacji kielek w $p \in M$ n -tkanin kowymiaru (c_1, \dots, c_n) co do działania grupy kielek dyfeomorfizmów unimodularnych redukuje się w pełni do klasyfikacji kielek form objętości Ω względem działania $\Omega \mapsto \varphi^*\Omega$ grupy $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}$ kielek w zerze dyfeomorfizmów φ zachowujących strukturę ustalonej tkaniny $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, której foliacje \mathcal{F}_i generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j c_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$. Odpowiedniość między klasami równoważności kielek tkanin a orbitami działania dana jest przez $\mathcal{W} = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n) \mapsto \mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}(\psi^{-1})^*\Omega$, gdzie $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ to dowolny układ współrzędnych o środku w $p \in M$ spełniający $T\mathcal{G}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.*

Dowód. Jeżeli dane są dwa kielki w $p \in M$ tkanin $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ na (M, Ω) związane kielkiem dyfeomorfizmu unimodularnego f w punkcie p będącym równoważnością kielek \mathcal{W}_1 i \mathcal{W}_2 , to zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1 można dobrać dwa lokalne układy współrzędnych $\varphi_1, \varphi_2 : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ tak, by φ_1, φ_2 były kielkami równoważności tkanin $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ odpowiednio z ustaloną tkaniną \mathcal{W}_0 tego samego kowymiaru. Formy objętości na przeciwdziedzinach φ_1, φ_2 są równe $\Omega_1 := (\varphi_1^{-1})^*\Omega$ oraz $\Omega_2 := (\varphi_2^{-1})^*\Omega$ odpowiednio. Odwzorowanie $g = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ powstałe przez sprzęgnięcie f z powyższymi równoważnościami będzie zachowywać tkaninę \mathcal{W}_0 oraz spełniać $g^*\Omega_2 = \Omega_1$, zatem każdej klasie unimodularnej

równoważności kielków tkanin odpowiada dokładnie jedna orbita działania grupy $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}$. Również odwrotnie, jeżeli w tym kontekście kieltek g równoważności \mathcal{W}_0 z \mathcal{W}_0 spełnia $g^*\Omega_2 = \Omega_1$, to wtedy $f = \varphi_2^{-1} \circ g \circ \varphi_1$ jest unimodularną równoważnością kielków tkanin \mathcal{W}_1 oraz \mathcal{W}_2 , co dowodzi, że odpowiedniość ta jest jeden do jednego.

Pokażemy, że jest ona „na”. Niech dany będzie kieltek w zerze formy objętości Ω_1 na \mathbb{R}^m . Wybierzmy dowolny układ współrzędnych ψ na M o środku w punkcie $p \in M$ i określmy kieltek formy objętości $\Omega_2 = (\psi^{-1})^*\Omega$ w punkcie $0 \in \mathbb{R}^m$. Zapiszmy obie formy w postaci $\Omega_i = h_i(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m$ oraz określmy odwzorowania $\varphi_i : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ wzorem

$$\varphi_i(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \int_0^{x_m} h_i(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, t) dt) \quad (2.2.1)$$

dla $i = 1, 2$. Stąd, że gęstości h_i są wszędzie niezerowe, odwzorowania φ_i są kielkami dyfeomorfizmów. Dodatkowo zachodzi $\varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m) = \Omega_i$ dla $i = 1, 2$, a zatem kieltek dyfeomorfizmu $f : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ danego przez $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \circ \psi$ spełnia $(f^{-1})^*\Omega = \Omega_1$ i zadaje układ współrzędnych prostujący kieltek tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ na (M, Ω) w $p \in M$, której foliacje zadane są przez całkowalne dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker df_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie f_i to składowe odwzorowania f we współrzędnych. To kończy dowód. \square

W ten sposób zagadnienie lokalnej klasyfikacji tkanin ustalonego kowymiaru w geometrii unimodularnej redukuje się do zagadnienia klasyfikacji kielków form objętości względem następującej relacji równoważności.

Definicja 2.19. Niech \mathcal{W}_0 będzie kielkiem w 0 tkaniny na \mathbb{R}^m . Powiemy, że dwa kielki w zerze form objętości Ω_1, Ω_2 na \mathbb{R}^m są \mathcal{W}_0 -równoważne, gdy istnieje kieltek w zerze dyfeomorfizmu φ zachowującego \mathcal{W}_0 taki, że $\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1$.

Przykład 2.3. Niech $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie kielkiem w zerze tkaniny kowymiaru 1 na przestrzeni \mathbb{R}^2 o współrzędnych (x, y) , której foliacje generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F} = \ker dx$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dy$. Wykażemy, że kielki form objętości $\Omega_i = h_i(x, y) dx \wedge dy$, gdzie

$$h_1(x, y) = e^{\frac{1}{4}x^2y^2}, \quad h_2(x, y) = (1+x)(1+y)e^{\frac{1}{4}x^2y^2}, \quad (2.2.2)$$

nie są \mathcal{W}_0 -równoważne pomimo, że tensory niejednorodności par $(\mathcal{W}_0, \Omega_i)$ dla $i = 1, 2$ są sobie równe i wynoszą $\mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega_i) = xy dx dy$. Gdyby założyć przeciwnie, kieltek równoważności $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ przyjąłby postać $\varphi(x, y) = (\hat{x}(x), \hat{y}(y))$ (co do permutacji

zmiennych) oraz spełniałby $\varphi^*\Omega_1 = \Omega_2$, czyli

$$e^{\frac{1}{4}\hat{x}(x)^2\hat{y}(y)^2}\hat{x}'(x)\hat{y}'(y) = (1+x)(1+y)e^{\frac{1}{4}x^2y^2}. \quad (2.2.3)$$

Kładąc w powyższym równaniu $x = y = 0$ otrzymalibyśmy $\hat{x}'(0)\hat{y}'(0) = 1$. Przyjęcie osobno $y = 0$ oraz $x = 0$ doprowadziłoby nas do tożsamości $\hat{x}(x) = \hat{x}'(0)(x + \frac{1}{2}x^2)$ oraz $\hat{y}(y) = \hat{y}'(0)(y + \frac{1}{2}y^2)$ odpowiednio, które razem przeczą (2.2.3).

Powyższy przykład częściowo odpowiada na pytanie postawione na początku rozdziału: równość tensorów niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega_i)$ kielka tkaniny \mathcal{W}_0 względem kielków form objętości Ω_1, Ω_2 nie pociąga za sobą wprost \mathcal{W}_0 -równoważności Ω_1, Ω_2 . Nasuwa się naturalne pytanie: czego właściwie brakuje, by umożliwić lokalną rekonstrukcję formy objętości ze stowarzyszonego z nim tensora niejednorodności? Odpowiedź staje się dobrze widoczna we współrzędnych prostujących tkaninę \mathcal{W}_0 . Zgodnie z Definicją 1.3 zagadnienie rekonstrukcji sprowadza się w nich do następującego problemu: mając daną część spośród mieszanych pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_i \partial x_j}$ pewnej funkcji gładkiej $\log|h| \in C^\infty(\mathbb{R}^m, 0)$, odnajdź h . Rozwiązania tak postawionego problemu są wyznaczone jedynie z dokładnością do mnożenia przez funkcje gładkie $f_i(x) = f_i(x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}})$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$. Jednym ze sposobów na ujednoznaczenie rozwiązania jest postawienie pewnego rodzaju „warunków początkowych” w naszym zagadnieniu, zadając z góry wartości szukanej funkcji h na pewnym podzbiorze jej dziedziny w taki sposób, by wyznaczyć jednoznacznie czynniki swobodne f_i . Okazuje się, że każdy taki zestaw warunków początkowych daje się sprowadzić do postaci trywialnej dobierając w odpowiedni sposób układ współrzędnych prostujący tkaninę \mathcal{W}_0 . Kilka kolejnych stron niniejszej pracy poświęcimy przedstawieniu powyższych wyników w sposób bardziej formalny i szczegółowy.

W poniższym twierdzeniu wykorzystamy pojęcie *cofnięcia* ι^*E gładkiej wiązki wektorowej $E \xrightarrow{p} M$ wzdłuż zanurzenia podrozmaitości $S \xrightarrow{\iota} M$. Jej cięcia, zwane *cięciami E wzdłuż S* , można utożsamiać z odwzorowaniami $s : S \rightarrow E$ spełniającymi $p \circ s = \iota$. W przypadku, gdy ι jest zanurzeniem topologicznym, każde takie cięcie można przedstawić jako złożenie $\sigma \circ \iota$ pewnego cięcia $\sigma \in \Gamma(E)$ z inkluzją ι dzięki [36, Lemma 10.12].

Twierdzenie 2.20. *Niech $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie ustaloną n -tkaniną na przestrzeni \mathbb{R}^m o współrzędnych globalnych (x_1, x_2, \dots, x_m) , której foliacje generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j c_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$*

oraz pewnych liczb naturalnych $c_1, \dots, c_n > 0$ spełniających łącznie $\sum_{i=1}^n c_i = m$. Niech dodatkowo \mathcal{F}_i^c będą foliacyjami generowanymi przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} T\mathcal{F}_j$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Oznaczmy przez L_i liście foliacji \mathcal{F}_i^c przecinające $0 \in \mathbb{R}^m$ oraz przez $\iota_i : L_i \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ odpowiadające im zanurzenia. Dla ustalonych

- (i) nigdzie nieznikających cięć $\Omega_i \in \Gamma(\iota_i^*(\wedge^m T\mathbb{R}^m))$ wzdłuż ι_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ takich, że $\Omega_i|_0 = \Omega_j|_0$ dla każdej pary indeksów $i, j = 1, 2, \dots, n$,

oraz

- (ii) pola 2-tensorów kowariantnych A spełniającego tożsamości tensorów niejednorodności

- (1) $A(X, Y) = A(Y, X)$ dla każdej pary $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$,
- (2) $A(X, Y) = 0$ dla wszystkich $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_i^c)$ oraz dowolnego ustalonego $i = 1, 2, \dots, n$,
- (3) $X A(Y, Z) = Y A(X, Z)$ dla $X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i^c)$, $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_j^c)$ oraz $Z \in \Gamma(T\mathcal{F}_k^c)$, gdzie $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ są takie, że $i \neq k$ oraz $j \neq k$,

istnieje dokładnie jedna forma objętości Ω na \mathbb{R}^m spełniająca $\Omega \circ \iota_i = \Omega_i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$ oraz $\mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega) = A$.

Dowód. We współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) danych w sformułowaniu twierdzenia mamy

$$\begin{aligned} L_i &= \{(0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m : x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}} \in \mathbb{R}\} \\ \Omega_i &= h_i(x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m \\ A &= \sum_{j,k=1}^m A_{jk} dx_j dx_k, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

gdzie $h_i \in C^\infty(L_i)$, $A_{jk} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ dla $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ są pewnymi funkcjami gładkimi. Określmy $\tilde{h} \in C(\bigcup_{i=1}^n L_i)$ wzorem $\tilde{h}(x) = h_i(x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}})$ dla argumentów $x \in L_i$. Uzyskana w ten sposób funkcja jest dobrze określona, gdyż $h_i(0) = h_j(0)$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Naszym celem jest rozszerzyć funkcję \tilde{h} do funkcji gładkiej $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ w taki sposób, by spełniony był układ równań różniczkowych cząstkowych $\frac{\partial^2 \log|h|}{\partial x_j \partial x_k} = A_{jk}$ dla wszystkich par indeksów $j, k = 1, 2, \dots, n$, dla których zachodzi $j \not\sim k$ w notacji (2.1.4), oraz wykazać

jednoznaczność tego rozszerzenia. Wtedy przyjęcie $\Omega = h(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ zakończy dowód. Układ ten można zapisać równoważnie w postaci całkowej

$$h(x) = \left(\frac{h(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_m) h(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)}{h(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)} \right) \cdot \exp \left(\int_0^{x_j} \int_0^{x_k} A_{jk}(x_1, \dots, t_j, \dots, t_k, \dots, x_m) dt_k dt_j \right) \quad \text{dla } j \neq k. \quad (2.2.5)$$

Równania te pozwalają nam wyrazić wartość funkcji h w punkcie $x = (x_1, \dots, x_m)$ przy pomocy współczynników tensora A oraz wartości h w punktach o ściśle mniejszej ilości niezerowych współrzędnych. Podczas gdy jest to możliwe na wiele sposobów – po jednym dla każdej pary indeksów $j \neq k$ – uzyskane wyniki okazują się być ze sobą wzajemnie zgodne. By to wykazać, oznaczymy prawą stronę równości (2.2.5) przez ρ_{jk} oraz zapiszmy występującą tam całkę podwójną z A_{jk} jako

$$\int_0^{x_j} \int_0^{x_k} \left(\int_0^{x_l} \frac{\partial}{\partial x_l} A_{jk}(x_1, \dots, t_j, \dots, t_k, \dots, t_l, \dots, x_m) dt_l \right) dt_k dt_j + \int_0^{x_j} \int_0^{x_k} A_{jk}(x_1, \dots, t_j, \dots, t_k, \dots, 0, \dots, x_m) dt_k dt_j \quad (2.2.6)$$

dla pewnego indeksu $l = 1, 2, \dots, n$ spełniającego $l \neq k$. Rozwińmy teraz drugi składnik tej sumy przy pomocy równości (2.2.5) zastosowanej w dowolnym punkcie postaci $(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_m)$, a następnie wstawmy uzyskany wynik z powrotem do (2.2.5). Z własności (3) pola tensorowego A oraz z twierdzenia Fubiniego o zamianie kolejności całkowania uzyskane w ten sposób wyrażenie na $h(x)$ jest symetryczne w indeksach j, l , a więc jest równe jednocześnie ρ_{jk} and ρ_{lk} . Ponieważ $\rho_{jk} = \rho_{kj}$, prawa strona (2.2.5) przyjmuje tą samą wartość niezależnie od wyboru indeksów j, k .

To pozwala wykazać istnienie i jednoznaczność rozszerzenia funkcji \tilde{h} za pomocą indukcji. Jeden ze sposobów przeprowadzenia indukcji polega na zdefiniowaniu dla dowolnego podzbioru zbioru indeksów $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ podprzestrzeni liniowej F_I wszystkich punktów $x = (x_1, \dots, x_m)$ spełniających $x_k = 0$ dla $k \notin I$. Podstawą indukcji jest fakt, że funkcja h jest dobrze określona i tożsama z \tilde{h} na wszystkich zbiorach postaci F_I dla $I \subseteq \pi_i$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$. Kolejne kroki indukcji wykorzystują wzór (2.2.5) do rozszerzenia h ze zbioru $F_{I'} \cup F_{I''}$ na zbiór F_I w sposób gładki i jednoznaczny, jeżeli tylko $I = I' \cup \{k\} = I'' \cup \{l\}$ dla pewnych $k \neq l$. Biorąc dowolny zbiór indeksów I nie uwzględniony w podstawie indukcji taki, że h rozszerza się w sposób gładki i jednoznaczny na zbiory F_J dla wszystkich $J \subsetneq I$, to prawdą jest, że $I \cap \pi_i \neq \emptyset$ oraz $I \cap \pi_j \neq \emptyset$ dla pewnej pary indeksów $i \neq j$. Można zatem przyjąć $I' = I \setminus \{k\}$ oraz $I'' = I \setminus \{l\}$ dla pewnych

$k \in I \cap \pi_i$ oraz $l \in I \cap \pi_j$ by rozszerzyć h na zbiór F_I z pomocą wzoru (2.2.5), wieńcząc indukcję oraz cały dowód. \square

Przedstawione powyżej rozumowanie można z powodzeniem przeprowadzić lokalnie, dla kielka w zerze tkaniny \mathcal{W}_0 oraz kielków cięć Ω_i, A , działając na ich reprezentantach określonych w odpowiednio małym otoczeniu zera postaci $U = (-\varepsilon, \varepsilon)^m \subseteq \mathbb{R}^m$. Fakt ten prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 2.21. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie kielkiem w punkcie $p \in M$ n -tkaniny na (M, Ω) , której foliacje spełniają łącznie $\sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_i = m$. Kieltek formy objętości Ω w punkcie $p \in M$ jest wyznaczony jednoznacznie przez kieltek tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny \mathcal{W} względem Ω w p oraz wartości formy Ω wzdłuż sumy $\bigcup_{k=1}^n L_k$ kielków liści foliacji dopełniających $L_k \in \mathcal{F}_k^c$ przecinających punkt p .*

Dowód. Poprzez redukcję zagadnienia lokalnego na M do zagadnienia na \mathbb{R}^m przy pomocy Stwierdzenia 1.1 oraz zastosowanie tezy Twierdzenia 2.20 o jednoznaczności formy objętości do $A = \mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ oraz $\Omega_i = \Omega \circ \iota_i$ dla inkluzji $\iota_i : L_i \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, n$. \square

Proces normalizacji danych początkowych Ω_i w zagadnieniu odczytywania formy objętości tła z postaci tensora niejednorodności ustalonej tkaniny przebiega w następujący sposób.

Lemat 2.22. *Niech $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie kielkiem w zerze n -tkaniny na \mathbb{R}^m o foliacjach generowanych przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_i+1} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j c_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$ oraz pewnych liczb c_1, c_2, \dots, c_n spełniających $\sum_{k=1}^n c_k = m$.*

- (1) *Kieltek dowolnej formy objętości $\Omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ jest \mathcal{W}_0 -równoważny kielkowi pewnej formy Ω_0 spełniającej $\Omega_{0|q} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ we wszystkich punktach postaci $q = (0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+1}, 0, \dots, 0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.*
- (2) *Każde odwzorowanie φ zadające \mathcal{W}_0 -równoważność dwóch kielków form objętości $\Omega_1, \Omega_2 \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ spełniających $\Omega_{1|q} = \Omega_{2|q} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ we wszystkich punktach $q = (0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+1}, 0, \dots, 0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ jest złożeniem odwzorowania $\psi(x) = (\psi_1(\mathbf{x}_1), \dots, \psi_n(\mathbf{x}_n))$, gdzie ψ_i to przekształcenia postaci*

$$(x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+1}) = \mathbf{x}_i \xrightarrow{\psi_i} \psi_i(\mathbf{x}_i) = (y_{m_i+1}(\mathbf{x}_i), \dots, y_{m_i+1}(\mathbf{x}_i)), \quad (2.2.7)$$

o stałych wyznacznikach $\det d\psi_i(\mathbf{x}_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, oraz permutacji współrzędnych $\mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_{\sigma(i)}$ dla pewnej $\sigma \in S^n$ spełniającej $\text{codim } \mathcal{F}_{\sigma(k)} = \text{codim } \mathcal{F}_k$. Złożenie to ma dodatkowo tę własność, że $\text{sgn } \sigma|_{J_o} \cdot \prod_{i=1}^n \det d\psi_i(\mathbf{x}_i) = 1$, gdzie przez J_o oznaczamy zbiór indeksów $j = 1, \dots, n$ dla których $\text{codim } \mathcal{F}_j$ jest nieparzysty.

Dowód. Forma Ω ma postać $h(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ dla pewnego kielka funkcji gładkiej $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m, 0)$. Wykonajmy podstawienie

$$y_{m_i+1} = \frac{1}{h(0)} \int_0^{x_{m_i+1}} h(0, \dots, 0, t, x_{m_i+2}, \dots, x_{m_i+1}, 0, \dots, 0) dt, \quad (2.2.8)$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$, oraz przyjmijmy $y_k = x_k$ dla wszystkich pozostałych współrzędnych. Oznaczmy powstałe w ten sposób przekształcenie $x \mapsto y(x)$ symbolem φ . Bezpośrednimi rachunkami dowodzimy, że dla każdego indeksu $i = 1, \dots, n$ oraz punktu postaci $q = (0, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, 0)$ zachodzi równość $\varphi^*(h(0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)|_q = \Omega|_q$. Aby uzyskać żądaną \mathcal{W}_0 -równoważność, wystarczy zatem przeskalować liniowo jedną ze współrzędnych.

Weźmy teraz \mathcal{W}_0 -równoważność φ kielków form objętości Ω_1 i Ω_2 spełniających $\Omega_1|_q = \Omega_2|_q = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ w każdym punkcie postaci $q = (0, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, 0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Ponieważ φ jest kielkiem auto-równoważności tkaniny \mathcal{W}_0 , przyjmuje on postać $\varphi(x) = (\varphi_1(\mathbf{x}_{\sigma(1)}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_{\sigma(n)}))$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz pewnej permutacji $\sigma \in S_n$ spełniającej $\text{codim } \mathcal{F}_{\sigma(i)} = \text{codim } \mathcal{F}_i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m|_q &= \varphi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)|_q \\ &= \pm \left(\prod_{j \neq i} \det \frac{\partial \varphi_{\sigma^{-1}(j)}}{\partial \mathbf{x}_j}(0) \right) \cdot \det \frac{\partial \varphi_{\sigma^{-1}(i)}}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m|_q, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

w każdym punkcie postaci $q = (0, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, 0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie przez $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_{\sigma(i)}}$ rozumiemy macierz Jacobiego odwzorowania φ_i w bazie standardowej. Równość ta pociąga za sobą stałość $\det \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_{\sigma(i)}}$ dla $i = 1, \dots, n$. Przyjmując w niej $x = 0$ otrzymujemy

$$\pm \prod_{i=1}^n \det \frac{\partial \varphi_{\sigma^{-1}(i)}}{\partial \mathbf{x}_i} = 1, \quad (2.2.10)$$

Właściwy znak odnajdujemy rozpisując σ jako iloczyn transpozycji indeksów τ odpowiadających permutacji zestawów zmiennych $\mathbf{x}_i \longleftrightarrow \mathbf{x}_j$, gdzie $\text{codim } \mathcal{F}_i = \text{codim } \mathcal{F}_j = c$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{N}$. Każda taka permutacja τ składa się z c transpozycji przemieszczających pojedyncze zmienne x_k , które łącznie przekładają się na dodatkowy czynnik $(-1)^c$ w wyznaczniku $\det d\varphi$. Jest on istotny tylko wtedy, gdy c jest liczbą nieparzystą. Iloczyn tych czynników to dokładnie liczba $\text{sgn } \sigma|_{J_o}$ z tezy twierdzenia. \square

Lemat ten w parze ze Stwierdzeniem 1.1 dostarcza sposobu na dalszą normalizację układów współrzędnych prostujących tkaninę.

Definicja 2.23. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . Układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) znormalizowany względem (\mathcal{W}, Ω) o środku w $p \in M$ to lokalny układ współrzędnych spełniający $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz

$$\Omega|_q = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (2.2.11)$$

dla wszystkich punktów q postaci $(0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}}, 0, \dots, 0)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $m_1 = 0$ oraz $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$.

Znormalizowane układy współrzędnych konstruuje się biorąc kiełek równoważności w punkcie p tkaniny \mathcal{W} oraz kielka tkaniny \mathcal{W}_0 na (\mathbb{R}^m, Ω_0) w zerze, który odnajdujemy w oparciu o Stwierdzenie 1.1, złożony z \mathcal{W}_0 -równoważnością opisaną w Lemacie 2.22.

Istnienie znormalizowanych układów współrzędnych stanowi uogólnienie twierdzenia Tabachnikova [48] o postaci normalnej formy objętości stowarzyszonej z 2-tkaniną bezdywergencyjną $(M, \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. Niech (x_1, x_2, \dots, x_m) będą współrzędnymi znormalizowanymi w powyższym sensie o środku w $p \in M$ ogólnej tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ zadanej na (M, Ω) , oraz niech $\mathfrak{m} = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ będzie ideałem maksymalnym pierścienia kielków funkcji gładkich w punkcie p . Gęstość $h \in C^\infty(M, p)$ formy objętości $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ w tych współrzędnych ma postać

$$h(x) = 1 + \sum_{i < j, m_i < k \leq m_{i+1}, m_j < l \leq m_{j+1}} \kappa_{kl} x_k x_l + f(x), \quad (2.2.12)$$

gdzie κ_{kl} to współczynniki w p tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p = \sum_{i,j} \kappa_{ij} dx_i dx_j$, podczas gdy kiełek funkcji gładkiej $f \in \mathfrak{m}^3$ przyjmuje wartości zerowe dla argumentów postaci $(0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}}, 0, \dots, 0)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$. Gdy tkanina \mathcal{W} składa się z dwóch foliacji, powyższa równość (wzięta modulo \mathfrak{m}^3) redukuje się do [48, Theorem 0.2, (ii)].

Ustalmy teraz kiełek w zerze n -tkaniny $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ na \mathbb{R}^m i przyjmijmy dodatkowo, że foliacje \mathcal{F}_i generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ w pewnych ustalonych współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) , gdzie $m_1 = 0$, $m_{j+1} = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$ oraz $m_{n+1} = \sum_{k=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_k = m$. Oznaczmy przez $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$ grupę wszystkich kielków dyfeomorfizmów $\varphi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ zachowujących kielki tkaniny \mathcal{W}_0 oraz spełniających $(\varphi^* \Lambda)|_q = \Lambda|_q$ dla jednostkowej formy objętości

$\Lambda = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m$ oraz każdego punktu q postaci $(0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+1}, 0, \dots, 0)$. Przekształcenia te grają rolę zamian układów współrzędnych pomiędzy układami znormalizowanymi przy pomocy Lematu 2.22. Przedstawiona wyżej redukcja grupy zamian układów współrzędnych prostujących \mathcal{W}_0 do grupy $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$ umożliwia przeformułowanie rozpatrywanego w tym rozdziale zagadnienia klasyfikacyjnego w następujący sposób.

Twierdzenie 2.24. *Niech $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie kielkiem w 0 ustalonej n -tkaniny kowymiary (c_1, \dots, c_n) dla pewnych liczb c_k spełniających $\sum_{k=1}^n c_k = m$. Wtedy klasy unimodularnej równoważności kielków w punkcie $p \in M$ tkanin na (M, Ω) kowymiary (c_1, \dots, c_n) są w bijekcji z orbitami działania grupy $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$ na kielkach w 0 pól kowariantnych 2-tensorów symetrycznych A na \mathbb{R}^m spełniających tożsamości tensorów niejednorodności z Twierdzenia 2.20 poprzez cofnięcie $A \mapsto \varphi^* A$ wzdłuż danego odwzorowania $\varphi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$. Odpowiedniość ta dana jest przez $\mathcal{W} \mapsto \mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N(\psi^{-1})^* \mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$, gdzie $\psi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ jest dowolnym układem współrzędnych znormalizowanym względem \mathcal{W} .*

Dowód. W dowodzie posłużymy się zagadnieniem klasyfikacji kielków w 0 form objętości na \mathbb{R}^m co do relacji \mathcal{W}_0 -równoważności, do którego za sprawą Twierdzenia 2.18 redukuje się pierwotne zagadnienie. Niezmienniczość tensora $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ względem równoważności tkanin gwarantuje, że $(\psi^{-1})^* \mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) = \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, (\psi^{-1})^* \Omega)$ dla dowolnego lokalnego układu współrzędnych $\psi : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$; $\psi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ spełniającego $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_i+1} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ redukującego zagadnienie na (M, p) do zagadnienia na $(\mathbb{R}^m, 0)$. Ustalmy takie współrzędne. Dzięki nim możemy bez przeszkód posługiwać się w dowodzie tensorami niejednorodności tkaniny \mathcal{W}_0 względem kielków form objętości na \mathbb{R}^m .

Weźmy dwa kielki w zerze form objętości Ω_1, Ω_2 na \mathbb{R}^m i załóżmy, że odwzorowanie φ spełniające $\varphi^* \Omega_2 = \Omega_1$ zadaje \mathcal{W}_0 -równoważność Ω_1 i Ω_2 . Z Lematu 2.22 możemy znaleźć \mathcal{W}_0 -równoważności ψ_1 form $\Omega_1, \tilde{\Omega}_1$ oraz ψ_2 form $\Omega_2, \tilde{\Omega}_2$ dla pewnych kielków form objętości $\tilde{\Omega}_i$ spełniających

$$\Omega_{1|q} = \Omega_{2|q} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m \quad (2.2.13)$$

we wszystkich punktach postaci $q = (0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+1}, 0, \dots, 0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Złożenie $\tilde{\varphi} = \psi_1 \circ \varphi \circ \psi_2^{-1}$ jest \mathcal{W}_0 -równoważnością $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2$. Ponieważ dodatkowo zachodzi 2.2.13, mamy $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$. Co więcej, z niezmienniczości tensora niejednorodności względem równoważności tkanin mamy $\tilde{\varphi}^* \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \tilde{\Omega}_2) = \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \tilde{\Omega}_1)$, co dowodzi, że przyporządkowanie z tezy twierdzenia jest dobrze określone.

W drugą stronę, mając dane odwzorowanie $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$ spełniające $\tilde{\varphi}^* \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \tilde{\Omega}_2) = \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \tilde{\Omega}_1)$, docieramy z niezmienniczości tensora niejednorodności względem równoważności tkanin do równości $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{W}_0, \tilde{\varphi}^* \tilde{\Omega}_2) = \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \tilde{\Omega}_1)$. Ponieważ

$$\tilde{\varphi}^* \tilde{\Omega}_{2|q} = \tilde{\Omega}_{1|q} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m \quad (2.2.14)$$

dla wszystkich punktów postaci $q = (0, \dots, 0, x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}}, 0, \dots, 0)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, z tezy o jednoznaczności w Twierdzeniu 2.20 otrzymujemy $\tilde{\varphi}^* \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_1$. To dowodzi \mathcal{W}_0 -równoważności $\tilde{\Omega}_1$ oraz $\tilde{\Omega}_2$, a więc również \mathcal{W}_0 -równoważności Ω_1 oraz Ω_2 poprzez złożenie $\tilde{\varphi}$ z odwzorowaniami ψ_1, ψ_2 . Wykazaliśmy w ten sposób, że różnym klasom unimodularnej równoważności kielków tkanin na (M, Ω) odpowiadają różne orbity działania grupy $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$. Aby wykazać, że odpowiedniość ta jest „na”, wystarczy zauważyć, że dowolne pole tensorowe A spełniające tożsamości tensorów niejednorodności tkaniny \mathcal{W}_0 , zgodnie z Twierdzeniem 2.20, istotnie jest tensorem niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega_1)$ tkaniny \mathcal{W}_0 względem pewnego kielka w zerze formy objętości Ω_1 . To sprawia, że odpowiedniość między klasami unimodularnej równoważności tkanin a orbitami działania grupy $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}$ jest bijekcją. Oba problemy klasyfikacyjne są równoważne. \square

Redukcja ta okazuje się być istotna ze względu na następujący fakt: grupa $\mathfrak{G}_{\mathcal{W}_0}^N$ jest grupą skończenie-wymiarową (wtedy i tylko wtedy), gdy tkanina \mathcal{W}_0 jest tkaniną kowymiaru 1. Każde odwzorowanie $\varphi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{W}}$ jest odwzorowaniem liniowym, ponieważ równości $\det \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{\sigma(i)}} = \text{const.}$ dla $i = 1, \dots, m$ spełnione zgodnie z Lematem 2.22 przez każdą zamianę współrzędnych $\varphi(x_1, \dots, x_m) = (\varphi_1(x_{\sigma(1)}), \dots, \varphi_m(x_{\sigma(m)}))$, $\sigma \in S_m$ między dwoma układami znormalizowanymi względem \mathcal{W}_0 w sensie Definicji 2.23 jest tym samym, co stałość różniczki $d\varphi$. Ta uwaga otwiera drogę do klasyfikacji kielków niektórych generycznych tkanin kowymiaru 1 posługując się elementarnymi narzędziami.

Przykład 2.4. Naszym celem jest odnalezienie postaci kanonicznej kielka generycznej formy objętości $\Omega = h(x, y) dx \wedge dy$ względem \mathcal{W}_0 -równoważności, gdzie $\mathcal{W}_0 = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ to kielk w zerze 2-tkaniny na \mathbb{R}^2 , której foliacje generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F} = \ker dx$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dy$. Biorąc pod uwagę tezę Lematu 2.22 możemy założyć, że $h(x, 0) = h(0, y) = 1$. Dodatkowo, każdy inny układ współrzędnych (\tilde{x}, \tilde{y}) w którym zachodzi $h(\tilde{x}, 0) = h(0, \tilde{y}) = 1$ różni się od (x, y) poprzez liniową zamianę współrzędnych postaci

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (cx, c^{-1}y) \quad \text{lub} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (cy, -c^{-1}x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.2.15)$$

Ponieważ tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega) = \kappa(x, y) dx dy = \frac{\partial \log|h|}{\partial x \partial y} dx dy$ jest niezmiennikiem par złożonych z tkaniny i formy objętości, również jego pochodna kowariantna względem koneksji Θ zgodnej z (\mathcal{W}_0, Ω) jest ilością niezmienniczą. Zgodnie z postacią macierzy θ koneksji Θ daną we wzorze (2.1.42) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega) &= \nabla(\kappa(x, y) dx dy) \\ &= (d\kappa - \kappa(\theta_1^1 + \theta_2^2)) \otimes (dx dy) \\ &= (d\kappa - \kappa d \log|h|) \otimes (dx dy). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Jej wartość w zerze wynosi dokładnie $d\kappa \otimes (dx dy)$, gdyż gęstość h jest stała na zbiorach $\{x = 0\}$ oraz $\{y = 0\}$.

Założmy teraz, że spełnione są warunki generyczności $\frac{\partial \kappa}{\partial x}(0) \neq 0$, $\frac{\partial \kappa}{\partial y}(0) \neq 0$. Wykorzystując obroty układu współrzędnych o kąt $\pi/2$ oraz przekształcenia postaci $(x, y) \mapsto (cx, \frac{1}{c}y)$ dla $c > 0$ możemy sprawić, by pochodna $\nabla \mathcal{K}(\mathcal{W}_0, \Omega)$ spełniała $\frac{\partial \kappa}{\partial x}(0) = \frac{\partial \kappa}{\partial y}(0) > 0$. Układ współrzędnych o tej własności jest wyznaczony jednoznacznie, zatem pozostaje już tylko zastosować lemat Hadamarda by uzyskać postać kanoniczną gęstości h , która wynosi

$$h(x, y) = 1 + xy(\kappa_0 + \frac{1}{2}a \cdot (x + y) + x^2 \tilde{g}_1(x) + xy \tilde{g}_{12}(x, y) + y^2 \tilde{g}_2(y)) \quad (2.2.17)$$

dla pewnych kielków funkcji gładkich $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, $\tilde{g}_{12} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, 0)$ oraz pewnych stałych rzeczywistych $\kappa_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$. Te dwa niezmienniki skalarne wyrażają się wzorami

$$\kappa_0 = \frac{\kappa(0)}{h(0)}, \quad a = \left| \frac{(h(0)\frac{\partial \kappa}{\partial x}(0) - \frac{\partial h}{\partial x}(0)\kappa(0)) \cdot (h(0)\frac{\partial \kappa}{\partial y}(0) - \frac{\partial h}{\partial y}(0)\kappa(0))}{h(0)^5} \right|^{1/2} \quad (2.2.18)$$

w dowolnym (niekoniecznie znormalizowanym) układzie współrzędnych (x, y) , w którym $T\mathcal{F} = \ker dx$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dy$. Dwie formy objętości spełniające powyższy warunek generyczności są \mathcal{W}_0 -równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy postacie kanoniczne ich gęstości są sobie równe.

2.3 Holonomia unimodularna tkanin

Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . W tym rozdziale skupimy się na pewnej geometrycznej interpretacji tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ pary (\mathcal{W}, Ω) inspirowanej pracami Blaschkego, Thomsena i Bola na temat 3-tkanin na płaszczyźnie [9, 44]

oraz opartej o interpretację tensora krzywizny struktur bilagranżowskich podaną w pracy Tabachnikova [48] w wymiarze 2.

Struktury bilagranżowskie definiuje się jako struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ składające się z rozmaitości gładkiej M , formy symplektycznej ω i dwóch transwersalnych foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} o liściach lagranżowskich. Z każdą taką strukturą związana jest dokładnie jedna beztorsyjna koneksja afiniczna ∇ spełniająca $\nabla_v \Gamma(T\mathcal{F}) \subseteq \Gamma(T\mathcal{F})$, $\nabla_v \Gamma(T\mathcal{G}) \subseteq \Gamma(T\mathcal{G})$, oraz $\nabla_v \omega = 0$ dla każdego $v \in TM$, którą nazywa się *koneksją bilagranżowską* [21, 51].

Zgodnie z interpretacją Tabachnikova jedyny niezerowy współczynnik tensora krzywizny koneksji bilagranżowskiej ∇ w punkcie p jest w przybliżeniu równy pewnemu ilorazowi pól powierzchni sąsiadujących ze sobą krzywoliniowych figur geometrycznych zamkniętych przez liście tkaniny, których jednym z wierzchołków jest dokładnie punkt p (Rysunek 1.4, lewa strona). Przystąpimy teraz do opisu analogicznej konstrukcji dla tkanin wyższego (ko)wymiaru w geometrii unimodularnej.

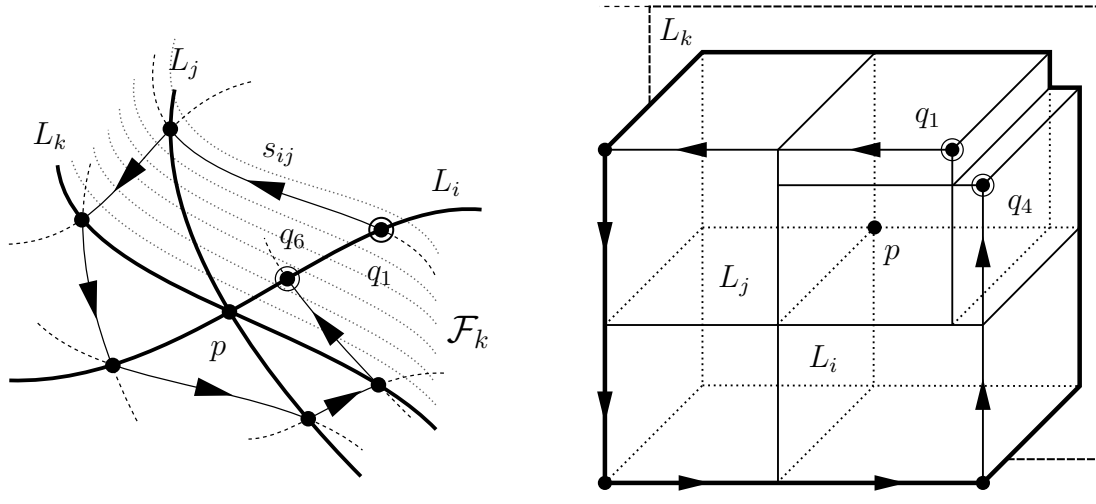
Dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ przez $[x, y]$ będziemy rozumieć zwykły przedział domknięty $[x, y]$ z orientacją dodatnią gdy $x \leq y$, oraz przedział domknięty $[y, x]$ z przeciwną orientacją gdy $x > y$. Dla każdej pary wektorów $a, b \in \mathbb{R}^m$ przyjmujemy oznaczenie $[a, b] = \prod_{k=1}^m [a_k, b_k]$, gdzie czynniki w tym iloczynie określone są w zgodzie z powyższą konwencją. Powstałą w ten sposób kostkę orientujemy iloczynowo.

Definicja 2.25. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 na M , oraz niech $p, q \in M$. Zbiór zwarty $C \subseteq U \subseteq M$ przyjmujący postać $[\varphi(p), \varphi(q)]$ w pewnym układzie współrzędnych $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_m)$ na U spełniającym $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, nazwiemy *obszarem ograniczonym przez liście tkaniny \mathcal{W} przecinające p oraz q* . Pracując w jednym ustalonym układzie współrzędnych będziemy posługiwać się również skrótowym oznaczeniem $[p, q]$ obszaru ograniczonego przez liście o postaci współrzędnościowej $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Zgodnie z powyższą definicją, każdy obszar C ograniczony przez liście tkaniny \mathcal{W} ma skończoną objętość względem formy objętości Ω . Ta Ω -objętość, określona przez

$$\text{Vol}^\Omega(C) = \left| \int_C \Omega \right|, \quad (2.3.1)$$

jest ważnym elementem konstrukcji *grupy holonomii unimodularnej* tkaniny \mathcal{W} na (M, Ω) . Grupa ta zbliżona jest w swojej esencji do grupy holonomii 3-tkaniny na płaszczyźnie, która mierzy jakościowo poziom jej *nieheksagonalności* w danym punkcie $p \in \mathbb{R}^2$ [9, 44],



Rysunek 2.2: Po lewej: holonomia 3-tkaniny na płaszczyźnie. Po prawej: holonomia unimodularna 3-tkaniny kowymiaru 1. Objętości kostek przylegających do siebie ścianami są identyczne.

tj. stopień, w jakim pewne krzywoliniowe łamane utworzone z liści tkaniny \mathcal{W} o węzłach leżących na liściach przecinających p nie są zamknięte (patrz Rysunek 2.2). Tkanina \mathcal{W} jest heksagonalna dokładnie wtedy, gdy pewna naturalna koneksja związana z \mathcal{W} (zwana w literaturze *koneksją Cherna* [24, 40]) jest płaska (patrz Rozdział 1.1.2).

Mówiąc nieco bardziej formalnie, własność nieheksagonalności odzwierciedla się w nietrywialności grupy generowanej przez kielki odwzorowań gładkich $\ell : (F, p) \rightarrow (F, p)$, które przekształcają jeden z końców łamanej na drugi. Każdy z tych kielków jest złożeniem sześciu innych, $s_{ij} : (F_i, p) \rightarrow (F_j, p)$, przenoszących punkty leżące na liściu $F_i \in \mathcal{F}_i$ na punkty z $F_j \in \mathcal{F}_j$ wzdłuż liści foliacji \mathcal{F}_k tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$, gdzie F_i, F_j przecinają punkt centralny p .

Grupy holonomii unimodularnej konstruujemy w podobny sposób, określając wpierw odpowiedni sposób przenoszenia punktów wzdłuż liści foliacji tkaniny \mathcal{W} kowymiaru 1 z wykorzystaniem formy objętości Ω , a następnie biorąc ich wielokrotne złożenia, których działania na swoich argumentach kreślą w przestrzeni (niekoniecznie zamknięte) „pętle” wokół danego punktu centralnego. Różnica pomiędzy kielkami tych złożzeń a kielkiem odwzorowania identycznościowego pozwoli nam odczytać współczynniki tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$.

2.3.1 Unimodularne odbicia i pętle

Wyjaśnimy teraz konstrukcję odwzorowania przenoszącego punkty wzdłuż foliacji tkaniny \mathcal{W} kowymiaru 1. Będzie ona wymagać dodatkowej definicji.

Definicja 2.26. Niech \mathcal{W} będzie n -tkaniną kowymiaru 1. Dwa obszary A, B ograniczone liśćmi tkaniny \mathcal{W} nazwiemy *przyległymi*, gdy

- (1) $C = A \cup B$ również jest obszarem ograniczonym przez liście \mathcal{W} ,
- (2) $A \cap B$ jest w całości zawarty w liściu L jednej z foliacji składowych tkaniny \mathcal{W} .

Mówimy wtedy, że A and B są przyległe wzdłuż L , lub że L dzieli obszar C na podobszary A oraz B .

Dla danej foliacji \mathcal{F} oraz podzbioru otwartego U jej dziedziny oznaczmy przez $\mathcal{F}|_U$ foliację U , której liśćmi są dokładnie składowe spójne zbiorów postaci $F \cap U$, gdzie F to liście foliacji \mathcal{F} .

Lemat 2.27. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) oraz niech $i = 1, 2, \dots, m$ będzie ustalonym indeksem.

- (1) Dla każdego $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte U punktu p takie, że każdemu punktowi $q \in U$, który nie leży na żadnym spośród liści L_j foliacji \mathcal{F}_j przecinających p dla $j = 1, 2, \dots, m$, odpowiada dokładnie jeden punkt $q' \in U$ różny od q taki, że obszary A oraz B ograniczone przez liście tkaniny \mathcal{W} przecinające p, q oraz p, q' odpowiednio są przyległe wzdłuż liścia L_i foliacji \mathcal{F}_i zawierającego p oraz mają identyczne Ω -objętości.

- (2) Odpowiedniość $q \mapsto q'$ rozszerza się jednoznacznie do funkcji gładkiej $r_{p,i} : U \rightarrow U$.

Dowód. Ustalmy układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) wyśrodkowany w p spełniający $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Taki układ współrzędnych istnieje dzięki Stwierdzeniu 1.1. Zapiszmy $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ dla pewnej nigdzie nieznikającej funkcji gładkiej $h \in C^\infty(M)$. Weźmy dwa punkty $q = (u_1, \dots, u_m)$ and $q' = (u'_1, \dots, u'_m)$ leżące na tym samym liściu $L' = \{(x_1, \dots, x_m) : \forall_{j \neq i} x_j = u_j\}$ foliacji dopełniającej \mathcal{F}_i^c generowanej przez dystrybucję styczną $T\mathcal{F}_i^c = \bigcap_{j \neq i} \ker dx_j$. Jeżeli nie leżą one na żadnym spośród liści $L_k = \{x_k = 0\} \in \mathcal{F}_k$ dla $k = 1, 2, \dots, m, k \neq i$, to różnica pomiędzy całkami

$$g_i(q, u'_i) = g_i(u_1, u_2, \dots, u_m, u'_i) = \int_0^{u_i} f_i(q, s) ds - \int_{u'_i}^0 f_i(q, s) ds \quad (2.3.2)$$

z funkcji f_i zdefiniowanej wzorem

$$\begin{aligned} f_i(q, s) &= f_i(u_1, u_2, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_m, s) \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 h(t_1 u_1, \dots, t_{i-1} u_{i-1}, s, t_{i+1} u_{i+1}, \dots, t_m u_m) dt_1 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_m \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

(gdzie daszek oznacza pominięcie zmiennej) wynosi zero dokładnie wtedy, gdy $\int_{[p,q]} \Omega = -\int_{[p,q']}\Omega$. Wynika to stąd, że zamiana zmiennych $x_k = t_k u_k$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, $k \neq i$ w całce (2.3.3) prowadzi natychmiast do równości

$$\int_0^{u_i} f_i(q, s) ds = \frac{1}{\prod_{j \neq i} u_j} \int_{[p,q]} \Omega \quad (2.3.4)$$

Ponieważ mówimy tu o objętościach zorientowanych, punkt q' musi leżeć po przeciwnej stronie liścia L_i względem punktu q (co w szczególności oznacza, że $q \neq q'$), zatem obszary $A = [p, q]$ oraz $B = [p, q']$ przecinają się wewnątrz liścia L_i . Ponadto, obszar $A \cup B$ ma postać współrzędnościową

$$A \cup B = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \in [q_i, q'_i] \wedge \forall_{k \neq i} x_k \in [p_k, q_k]\}, \quad (2.3.5)$$

gdzie przedziały domknięte traktujemy jak łańcuchy zorientowane zgodnie z Definicją 2.25, a więc jest on również obszarem ograniczonym przez liście tkaniny \mathcal{W} . Obszary A i B są zatem przyległe. W tym wypadku warunek $\int_{[p,q]} \Omega = -\int_{[p,q']}\Omega$ spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Vol}^\Omega(A) = \text{Vol}^\Omega(B)$.

Jedyność punktu q' o tych własnościach dla ustalonego q gwarantuje ścisła monotoniczność funkcji g względem zmiennej u'_i . Jego lokalne istnienie można wydedukować w oparciu o klasyczne twierdzenie o funkcji uwikłanej zastosowane do funkcji g , uzyskując w ten sposób funkcję gładką $\rho_i : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą

$$g_i(q, \rho_i(q)) = g_i(0) = \int_0^0 f_i(0, s) ds - \int_0^0 f_i(0, s) ds = 0, \quad (2.3.6)$$

gdzie \tilde{U} to otoczenie otwarte punktu p równe $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$ we współrzędnych dla pewnego $\varepsilon > 0$. Połóżmy

$$r_{p,i}(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \rho_i(u_1, \dots, u_m), u_{i+1}, \dots, u_m) \quad (2.3.7)$$

by uzyskać przekształcenie gładkie $r_{p,i} : \tilde{U} \rightarrow M$ rozszerzające odpowiedniość $q \mapsto q'$. Każde inne gładkie rozszerzenie tej odpowiedniości pokrywa się z $r_{p,i}$ na otwartym i gęstym

podzbiore zbioru dostatecznie małego otoczenia punktu p z jedyności punktu q' . Jego kieltek jest więc równy kielkowi $r_{p;i}$ dzięki ciągłości obu przekształceń. To dowodzi, że rozszerzenie gładkie odpowiedniości $q \mapsto q'$ na dostatecznie małe otoczenie punktu p jest wyznaczone jednoznacznie.

Aby zakończyć dowód, przyjmijmy $U = \tilde{U} \cap r_{p;i}^{-1}(\tilde{U})$. Zauważmy, że na tym zbiorze zachodzi $r_{p;i} \circ r_{p;i} = \text{id}_U$. Dzieje się tak, ponieważ relacja przylegania obszarów ograniczonych przez liście i posiadania przez nie tych samych Ω -objętości jest symetryczna. Jeżeli więc dany jest punkt $q \in \tilde{U}$, którego obraz q' względem rozpatrywanej odpowiedniości leży w $\tilde{U} \setminus \bigcup_{i=1}^m L_i$, obrazem q' musi być dokładnie $q'' = q$ z jednoznaczności. Ta relacja, rozszerzona z ciągłości $r_{p;i}$ na U , to dokładnie $r_{p;i}^2 = \text{id}_U$. Ponieważ $r_{p;i}(p) = p$, zbiór U jest niepusty, co ostatecznie dowodzi tezy lematu. \square

Definicja 2.28. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 określoną na (M, Ω) , oraz niech $p \in M$. Dla dowolnego ustalonego $i = 1, 2, \dots, m$ kieltek odwzorowania $r_{p;i} : (M, p) \rightarrow (M, p)$ zdefiniowanego w Lemacie 2.27 nazywamy *odbiciem unimodularnym względem foliacji \mathcal{F}_i tkaniny \mathcal{W} zakotwiczonym w punkcie p* .

Odbicia unimodularne zdefiniowano w oparciu o pojęcia niezmiennicze względem równoważności tkanin, takie jak *obszary ograniczone przez liście tkaniny*, ich *przyleganie* oraz *Ω -objętości*. Oznacza to, że dowolna równoważność $\varphi : M \rightarrow N$ tkanin $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ określonych na $(M, \Omega_1), (M, \Omega_2)$ odpowiednio ma tę własność, że

- (1) obraz $\varphi(C)$ obszaru $C \subseteq M$ ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W}_1 jest obszarem ograniczonym przez liście tkaniny \mathcal{W}_2 ,
- (2) jeżeli liść $L \in \mathcal{F}$ foliacji \mathcal{F} tkaniny \mathcal{W}_1 dzieli obszar C ograniczony przez liście tkaniny \mathcal{W}_1 na podobszary A, B , to liść $\varphi(L)$ foliacji \mathcal{G} tkaniny \mathcal{W}_2 spełniającej $d\varphi(T\mathcal{F}) = T\mathcal{G}$ dzieli obszar $\varphi(C)$ na podobszary $\varphi(A), \varphi(B)$, oraz
- (3) $\text{Vol}^{\Omega_1}(C) = \text{Vol}^{\Omega_2}(\varphi(C))$.

Stąd niemal wprost wynika, że sprzęgnięcia tych odwzorowań z lokalnymi równoważnościami tkanin również są odbiciami unimodularnymi.

Stwierdzenie 2.29. Niech $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ oraz $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m)$ będą tkaninami kowymiaru 1 określonymi na (M, Ω_1) oraz (N, Ω_2) odpowiednio. Jeżeli $\varphi : M \rightarrow N$ jest lokalną równoważnością tkanin \mathcal{W}_1 i \mathcal{W}_2 spełniającą $\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1$ oraz przekształcającą

liście foliacji \mathcal{F}_i na liście foliacji $\mathcal{G}_{\sigma(i)}$ dla pewnej permutacji $\sigma \in S_m$, to dla ustalonego punktu $p \in M$ oraz punktu $s = \varphi(p) \in N$ odpowiednie odbicia unimodularne spełniają

$$r_{s;\sigma(i)} = \varphi \circ r_{p;i} \circ \varphi^{-1} \quad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3.8)$$

Dowód. Wybierzmy reprezentantów $r_{p;i}$, $r_{s;\sigma(i)}$ określonych na odpowiadających im zbiorach otwartych U, V posiadających własność z punktu (1) Lematu 2.27. Załóżmy bez utraty ogólności, że $\varphi = \varphi|_U$ jest równoważnością tkanin oraz że $\varphi(U) \subseteq V$. Jeżeli dwa różne punkty q, q' rozpinają przyległe obszary A, B ograniczone przez liście tkaniny \mathcal{W}_1 przecinające p, q oraz p, q' odpowiednio o równych Ω_1 -objętościach, ich obrazy $\varphi(q), \varphi(q')$ również mają analogiczną własność względem tkaniny \mathcal{W}_2 i formy objętości Ω_2 . To natychmiast prowadzi do implikacji

$$q' = r_{p;i}(q) \implies \varphi(q') = r_{s;\sigma(i)}(\varphi(q)) \quad (2.3.9)$$

dla q w gęstym podzbiórze otwartym zbioru U dzięki tezie Lematu 2.27 o jednoznaczności odbić unimodularnych na zbiorach U, V , co z ciągłości obu odwzorowań dowodzi pożądanej relacji (2.3.8). \square

W podobny sposób dowodzi się następujące własności odbić unimodularnych.

Lemat 2.30. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) . Ustalmy punkt $p \in M$ oraz $i = 1, 2, \dots, m$ i oznaczmy przez $r_{p;i}$ odbicie unimodularne względem \mathcal{F}_i tkaniny \mathcal{W} zakotwiczone w punkcie p . Wtedy*

- (1) $r_{p;i} \circ r_{p;i} = \text{id}$,
- (2) dla dowolnego $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jeżeli $\tilde{r}_{p;i}$ jest odbiciem unimodularnym względem \mathcal{F}_i tkaniny \mathcal{W} określonej na $(M, c\Omega)$ zakotwiczonym w $p \in M$, to zachodzi równość $r_{p;i} = \tilde{r}_{p;i}$.
- (3) w dowolnym układzie współrzędnych (x_1, \dots, x_m) o środku w p określonym na zbiorze otwartym $U \subseteq M$ posiadającym własność z punktu (1) Lematu 2.27 oraz spełniającym $T\mathcal{F}_j = \ker dx_j$ dla $j = 1, 2, \dots, m$, warunek $x_i(q) > 0$ pociąga za sobą $x_i(r_{p;i}(q)) < 0$ dla dowolnego $q \in U$.

Dowód. Własności (1) oraz (2) są natychmiastową konsekwencją Lematu 2.27 oraz jego tezy o jednoznaczności odbić unimodularnych. Mówi on, że jeżeli dany jest generyczny

punkt q leżący w dostatecznie małym otoczeniu punktu p , odpowiada mu jednoznacznie taki punkt q' różny od q , że obszary ograniczone przez liście $[p, q]$, $[p, q']$ tkaniny \mathcal{W} są przyległe wzdłuż liścia foliacji \mathcal{F}_i i mają te same Ω -objętości. Własność (1) jest równoważna stwierdzeniu, że punktem odpowiadającym w ten sposób punktowi q' jest dokładnie q , co ma swoje źródło w symetrii obu powyższych relacji między obszarami. Druga własność odzwierciedla się w fakcie, że dwa obszary o równych Ω -objętościach mają równe $c\Omega$ -objętości.

By uzyskać ostatnią własność (3) wystarczy użyć Lematu 2.27 oraz ścisłej monotoniczności funkcji $x \mapsto \int_{[p,q]} \Omega$ względem zmiennej x_i dla generycznych $q = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U$. Gdy $x_i = 0$, funkcja ta przyjmuje wartość 0, a zatem dzięki jej różnowartościowości jej moduł przyjmuje zadaną wartość jedynie w dwóch punktach. Z monotoniczności leżą one po przeciwnych stronach hiperpłaszczyzny danej równaniem $x_i = 0$, co kończy dowód dla generycznych punktów q oraz dla pozostałych punktów $q \in U$ z ciągłości odwzorowania $r_{p;i}$. \square

Teza Stwierdzenia 2.29 o niezmienniczości odbić unimodularnych przenosi się w sposób naturalny na złożenia kielków odwzorowań $r_{p;i}$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Ich własności dane w powyższym Lemacie 2.30 sugerują, że najkrótsze spośród nietrywialnych złożenia odbić $r_{p;i}$, które są porównywalne z odwzorowaniem identycznościowym (a więc mogące posłużyć za miarę nietrywialności tkaniny \mathcal{W} względem formy objętości Ω), to komutatory dwóch odbić.

Definicja 2.31. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) . Dla ustalonych $p \in M$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, m$ kieltek złożenia

$$\ell_{p;i,j} = r_{p;j} \circ r_{p;i} \circ r_{p;j} \circ r_{p;i} \quad (2.3.10)$$

nosi nazwę (*unimodularnej*) pętli względem foliacji \mathcal{F}_i i \mathcal{F}_j tkaniny \mathcal{W} zakotwiczonej w p .

Definicja 2.32. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) . Dla ustalonego punktu $p \in M$ oznaczmy przez \mathcal{R}_p grupę generowaną przez odbicia unimodularne $r_{p;i}$ zakotwiczone w punkcie p względem foliacji \mathcal{F}_i dla $i = 1, 2, \dots, m$. Grupę holonomii unimodularnej tkaniny \mathcal{W} w punkcie $p \in M$ określamy jako komutator $[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$.

Grupa holonomii unimodularnej generowana jest przez sprzężenia pętli unimodularnych $\ell_{p;i,j}$ z odbiciami unimodularnymi $r_{p;k}$ dla $i, j, k = 1, 2, \dots, m$. Ich trywialność można

wyrazić jako przemienność wszystkich par odbić, czyli trywialność wszystkich pętli zakotwiczonych w $p \in M$.

Przykład 2.5. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną na $(\mathbb{R}^m, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m)$ ze współrzędnymi kanonicznymi (x_1, x_2, \dots, x_m) , w których $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Odbicia unimodularne $r_{p;i}$ względem \mathcal{F}_i zakotwiczone w $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$ są w tym przypadku zwyczajnymi odbiciami liniowymi

$$r_{p;i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i + 2p_i, x_{i+1}, \dots, x_m). \quad (2.3.11)$$

Grupa holonomii unimodularnej $[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ w punkcie $p \in \mathbb{R}^m$ tkaniny \mathcal{W} jest trywialna.

Grupy holonomii unimodularnej $[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ można traktować jako niezmienniki grupy równoważności ustalonej tkaniny \mathcal{W} kowymiaru 1 posługując się następującą konstrukcją. Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.29 każdy kiełek φ w punkcie $p \in M$ równoważności tkanin \mathcal{W}_1 oraz \mathcal{W}_2 działa na odbicia unimodularne w punkcie p poprzez sprzężenie – jeżeli φ przekształca liście foliacji \mathcal{F}_i tkaniny \mathcal{W}_1 na liście foliacji $\mathcal{G}_{\sigma(j)}$ tkaniny \mathcal{W}_2 dla pewnej permutacji $\sigma \in S_m$, to wynikiem działania φ na $r_{p;i}$ jest $r_{\varphi(p);\sigma(i)} = \varphi \circ r_{p;i} \circ \varphi^{-1}$. Działanie φ definiuje zatem izomorfizm grup $\varphi_* : \mathcal{R}_p \rightarrow \mathcal{R}_{\varphi(p)}$ obcinający się do izomorfizmu odpowiadających im komutatorów $[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ oraz $[\mathcal{R}_{\varphi(p)}, \mathcal{R}_{\varphi(p)}]$. Jeżeli $p = \varphi(p)$, to φ_* jest po prostu obcięciem automorfizmu wewnętrznego grupy kielków w p dyfeomorfizmów M będącego sprzężeniem przez φ .

Definicja 2.33. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) , oraz niech (U, φ) będzie mapą o środku w ustalonym punkcie $p \in M$ z lokalnym układem współrzędnych $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))$ spełniającym $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Klasę sprzężoności $\varphi_*[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ wewnątrz grupy wszystkich kielków w zerze dyfeomorfizmów przestrzeni \mathbb{R}^m nazwiemy *holonomią unimodularną tkaniny \mathcal{W} w punkcie p* .

Holonomia w punkcie $p \in M$ tkaniny \mathcal{W} kowymiaru 1 na (M, Ω) jest jej dobrze określonym lokalnym niezmiennikiem, gdyż obrazy $[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ względem dwóch takich map (U_1, φ_1) oraz (U_2, φ_2) tworzą grupy $\varphi_{1*}[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ oraz $\varphi_{2*}[\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_p]$ leżące w tej samej klasie sprzężoności wewnątrz grupy kielków w 0 dyfeomorfizmów \mathbb{R}^m – są one sprzężone przez kielkę dyfeomorfizmu $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$. Jej trywialność w jawny sposób zależy od tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny \mathcal{W} względem Ω , co wykażemy niebawem. Poniżej podamy wpierw elementarny przykład tkaniny o nietrywialnej holonomii unimodularnej.

Przykład 2.6. Niech (x, y) będą standardowymi współrzędnymi na \mathbb{R}^2 oraz niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie 2-tkaniną na $(-1, 1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ z formą objętości $\Omega = (1 + xy) dx \wedge dy$, gdzie $T\mathcal{F} = \ker dx$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dy$. Jej tensor niejednorodności to

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) = (1 + xy)^{-2} dx dy \neq 0. \quad (2.3.12)$$

Bezpośredni rachunek pozwala nam odnaleźć postać zamkniętą odbić unimodularnych $r_{0;1}, r_{0;2}$ zakotwiczonych w 0 względem foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} odpowiednio. W wyniku otrzymamy

$$\begin{aligned} r_{0;1}(x, y) &= (z(x, y), y), \\ r_{0;2}(x, y) &= (x, z(y, x)), \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

gdzie funkcja gładka

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4(1-xy)-x^2y^2}-2}{y}, & \text{gdy } y \neq 0, \\ -x, & \text{gdy } y = 0 \end{cases} \quad (2.3.14)$$

określona jest na pewnym otoczeniu 0. Korzystając z tych wzorów obliczamy postać zamkniętą funkcji $\ell_{0;1,2}$. Ciąg rachunków prowadzi do wzoru

$$\ell_{0;1,2}(x, y) = \left(\frac{(\sqrt{4(1-xy)-x^2y^2}-2)^2}{xy^2}, \frac{x^2y^3}{(\sqrt{4(1-xy)-x^2y^2}-2)^2} \right). \quad (2.3.15)$$

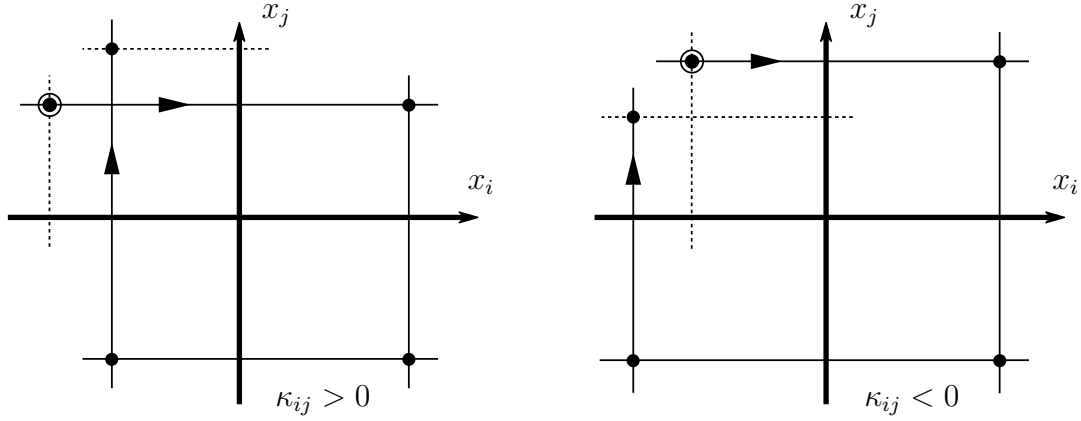
Ponieważ odwzorowanie to generuje grupę holonomii tkaniny \mathcal{W} w zerze, holonomia tkaniny \mathcal{W} w zerze jest nietrywialna.

2.3.2 Związek holonomii i tensora niejednorodności

W poniższych lematkach udowodnimy, że dla tkaniny \mathcal{W} kowymiary 1 na (M, Ω) tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p$ w punkcie $p \in M$ mierzy ilościowo nietrywialność odwzorowań wchodzących w skład grupy holonomii unimodularnej w punkcie p tkaniny \mathcal{W} .

Lemat 2.34. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną kowymiary 1 na (M, Ω) . Ustalmy punkt $p \in M$ oraz układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) o środku w p taki, że $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$ oraz $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$. Odbicia unimodularne $r_{p;i}$ względem foliacji \mathcal{F}_i tkaniny \mathcal{W} zakotwiczone w punkcie p spełniają

$$r_{p;i}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z(x), x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2.3.16)$$



Rysunek 2.3: Wpływ tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) = \sum_{i \neq j} k_{ij} dx_i dx_j$ na kształt odbić unimodularnych.

dla pewnej funkcji $z(x)$ postaci

$$z(x) = -x_i - \alpha_i x_i^2 - \alpha_i^2 x_i^3 - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_i^2 x_j + o(|x|^3), \quad (2.3.17)$$

gdzie $\alpha_i = (\frac{\partial}{\partial x_i} \log|h|)(0)$ oraz $\alpha_{ij} = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \log|h|)(0)$.

Lemat 2.35. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną kowymiaru 1 na (M, Ω) . Ustalmy punkt $p \in M$ oraz układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) o środku w p taki, że $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Zapiszmy formę objętości tła jako $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ oraz tensor niejednorodności w punkcie p jako $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p = \sum_{i \neq j} \kappa_{ij} dx_i dx_j$, gdzie $\kappa_{ij} = \frac{\partial \log|h|}{\partial x_i \partial x_j}(p)$. Przy takich oznaczeniach, pętla unimodularna $\ell_{p;i,j}$ względem foliacji $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$ tkaniny \mathcal{W} zakotwiczona w punkcie p spełnia

$$\ell_{p;\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_j}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, u_i(x), x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, u_j(x), x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (2.3.18)$$

gdzie i -ta i j -ta współrzędna obrazu to

$$\begin{aligned} u_i(x) &= x_i + 2\kappa_{ij} x_i^2 x_j + o(|x|^3) \quad \text{and} \\ u_j(x) &= x_j - 2\kappa_{ij} x_i x_j^2 + o(|x|^3). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

odpowiednio (porównaj z Rysunkiem 2.3).

Dowód obu powyższych lematów redukuje się do elementarnych obliczeń dotyczących funkcji ρ_i określonej w (2.3.6) będącej i -tą współrzędną odbicia unimodularnego $r_{p;i}$ względem \mathcal{F}_i w układzie współrzędnych prostującym tkaninę $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ kowymiaru 1. W dowodzie podamy kilka kroków pośrednich wykonanych rachunków, by umożliwić weryfikację ich poprawności.

Dowód (Lematu 2.34 oraz Lematu 2.35). Posłużymy się tutaj funkcjami f_i, g_i, ρ_i określonymi za pomocą wzorów (2.3.2), (2.3.3) oraz (2.3.6) wewnątrz dowodu Stwierdzenia 2.27, a także następującymi oznaczeniami:

$$\begin{aligned} x &= u_i, & (y_1, \dots, y_{m-1}) &= (u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_m), \\ z &= u'_i, & g(x, y, z) &= g_i(u_1, \dots, u_m, u'_i), \\ & & \rho(x, y) &= \rho_i(u_1, \dots, u_m), \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

gdzie daszek oznacza pominięcie zmiennej. Dla uproszczenia zapisu skorzystamy także z następującej konwencji notacyjnej: oznaczmy pochodne cząstkowe dowolnej funkcji f w zerze umieszczające kolejne zmienne, względem których różniczkujemy, w indeksie dolnym przy symbolu f zaznaczając rząd różniczkowania w wykładniku odpowiedniej zmiennej, na przykład $(\partial_{xxzy_i} f)|_0 = f_{x^2zy_i}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \partial_x g(x, y, z) &= f_i(y, x), \\ \partial_z g(x, y, z) &= f_i(y, z) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

dla funkcji $f_i(y, x)$ zdefiniowanej wzorem (2.3.3). Stąd docieramy do $(\partial_{xz} g)(x, y, z) = 0$, co daje

$$\begin{aligned} g_{y_1^{e_1} \dots y_{m-1}^{e_{m-1}}} &= 0, \quad \text{oraz} \\ g_{x^{k+1} y_1^{e_1} \dots y_{m-1}^{e_{m-1}}} &= g_{z^{k+1} y_1^{e_1} \dots y_{m-1}^{e_{m-1}}} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{m-1} (e_j + 1)} \cdot h_{x^k y_1^{e_1} \dots y_{m-1}^{e_{m-1}}}, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

dla dowolnych liczb naturalnych $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, k \geq 0$. Uzyskujemy zatem

$$\begin{aligned} \rho|_0 &= 0, & \rho_{xx} &= -2 \cdot (\log|h|)_x, & \rho_{xxx} &= -6 \cdot (\log|h|)_x^2, \\ \rho_x &= -1, & \rho_{xy_k} &= 0, & \rho_{xxy_k} &= -(\log|h|)_{xy_k}, \\ \rho_{y_k} &= 0, & \rho_{y_k y_l} &= 0, & \rho_{xy_k y_l} &= 0, \\ & & & & \rho_{y_k y_l y_n} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

dla $k, l, n = 1, \dots, m - 1$ korzystając ze wzorów ogólnych na pochodne funkcji uwikłanej

$$\begin{aligned}
\rho_a &= -\frac{g_a}{g_z} \\
\rho_{ab} &= \frac{g_{az}g_b g_z + g_{bz}g_a g_z - g_{zz}g_a g_b - g_{ab}g_z^2}{g_z^3} \\
\rho_{abc} &= -\frac{g_{azz}g_b g_c + g_{bzz}g_a g_c + g_{czz}g_a g_b}{g_z^3} - 2 \cdot \frac{g_{az}g_b g_c + g_{az}g_{cz}g_b + g_{bz}g_{cz}g_a}{g_z^3} \\
&\quad - \frac{g_{ab}g_c + g_{ac}g_b + g_{bc}g_a}{g_z^3} \cdot g_{zz} - \frac{g_{abc}}{g_z} \\
&\quad + \frac{g_{abz}g_c + g_{acz}g_b + g_{bcz}g_a}{g_z^2} + \frac{g_{ab}g_{cz} + g_{ac}g_{bz} + g_{bc}g_{az}}{g_z^2} \\
&\quad + 3 \cdot \frac{g_{az}g_b g_c + g_{bz}g_a g_c + g_{cz}g_a g_b}{g_z^4} \cdot g_{zz} - 3 \cdot \frac{g_a g_b g_c g_{zz}^2}{g_z^5} + \frac{g_a g_b g_c g_{zzz}}{g_z^4},
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

gdzie a, b, c oznaczają dowolne spośród zmiennych x, y, z dla $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Ponieważ

$$r_{p;i}(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \rho_i(u), u_{i+1}, \dots, u_m) \tag{2.3.25}$$

dla $\rho_i(u) = \rho(x, y)$, otrzymujemy tezę Lematu 2.34 biorąc rozwinięcie Taylora w zerze. Rozwinięcie rzędu 3 pętli unimodularnej $\ell_{p;i,j}$ uzyskujemy poprzez odpowiednie złożenie rozwinięć odbić unimodularnych $r_{p;i}$ and $r_{p;j}$. Oznaczmy teraz przez $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ rzutowanie $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. W kolejnych krokach otrzymamy zgodnie z oznaczeniami z tezy Lematu 2.34

$$\begin{aligned}
\pi_i \circ r_{p;i}(q) &= -x_i - \alpha_i x_i^2 - \alpha_i^2 x_i^3 - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_i^2 x_j + o(|x|^3), \\
\pi_j \circ r_{p;i}(q) &= x_j + o(|x|^3),
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

$$\begin{aligned}
\pi_i \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}(q) &= -x_i - \alpha_i x_i^2 - \alpha_i^2 x_i^3 - \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} x_i^2 x_k + o(|x|^3), \\
\pi_j \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}(q) &= -x_j - \alpha_j x_j^2 - \alpha_j^2 x_j^3 - \sum_{k \neq j} \alpha_{jk} x_j^2 x_k + o(|x|^3),
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

$$\begin{aligned}
\pi_i \circ r_{p;i} \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}(q) &= x_i + -2\alpha_{ij} x_i^2 x_j, \\
\pi_j \circ r_{p;i} \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}(q) &= -x_j - \alpha_j x_j^2 - \alpha_j^2 x_j^3 - \sum_{k \neq j} \alpha_{jk} x_j^2 x_k + o(|x|^3),
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

$$\begin{aligned}
\pi_j \circ r_{p;j} \circ r_{p;i} \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}(q) &= x_i + -2\alpha_{ij} x_i^2 x_j + o(|x|^3), \\
\pi_j \circ r_{p;j} \circ r_{p;i} \circ r_{p;j} \circ r_{p;i}(q) &= x_j - 2\alpha_{ij} x_i x_j^2 + o(|x|^3)
\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

dla $\alpha_i = (\log|h|)_{x_i}$ oraz $\alpha_{ij} = \kappa_{ij} = (\log|h|)_{x_i x_j}$, co kończy dowód. \square

2.3.3 Warunki geometryczne trywialności tkanin

Po wprowadzeniu potrzebnych pojęć jesteśmy już gotowi podać i udowodnić analogon warunku geometrycznego Tabachnikova [48, Fig. 2] dotyczący trywialności dowolnej tkaniny kowymiaru 1, który następnie wykorzystamy w kolejnym dziale do wskazania jego

dalszego uogólnienia na tkaniny dowolnych kowymiarów. Zanim przejdziemy do sformułowań kolejnych twierdzeń, przypomnijmy definicję *przylegania* obszarów ograniczonych przez liście tkaniny. Można ją znaleźć w Definicji 2.26.

Twierdzenie 2.36. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie m -tkaniną kowymiaru 1 określoną na (M, Ω) . Następujące warunki są równoważne.*

- (1) *Tkanina \mathcal{W} jest lokalnie trywialna.*
- (2) *Dla każdej pary różnych indeksów $i, j = 1, 2, \dots, m$, dowolnego obszaru K ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W} i dowolnych dwóch podzbiorów otwartych liści $L_i \in \mathcal{F}_i, L_j \in \mathcal{F}_j$, które dzielą K na cztery podobszary A, B, C, D spełniające $(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq L_i$ oraz $(A \cup D) \cap (B \cup C) \subseteq L_j$, objętości a, b, c, d obszarów A, B, C, D względem formy Ω spełniają.*

$$ac = bd. \tag{2.3.30}$$

- (3) *Dla każdej pary różnych indeksów $i, j = 1, 2, \dots, m$, dowolnego obszaru K ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W} i dowolnych dwóch podzbiorów otwartych liści $L_i \in \mathcal{F}_i, L_j \in \mathcal{F}_j$, które dzielą K na cztery podobszary A, B, C, D spełniające $(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq L_i$ oraz $(A \cup D) \cap (B \cup C) \subseteq L_j$ o Ω -objętościach a, b, c, d związanych równościami $a + b = c + d$, równość $a = b$ implikuje $a = b = c = d$.*
- (4) *Dla dowolnego obszaru K ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W} oraz każdego $k = 1, 2, \dots, m$ istnieją podzbiory otwarte liści $L_i \in \mathcal{F}_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ które dzielą K na 2^k podobszarów o równych Ω -objętościach.*
- (5) *Holonomia unimodularna tkaniny \mathcal{W} w dowolnym punkcie $p \in M$ jest trywialna.*
- (6) *Tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny \mathcal{W} względem Ω znika w każdym punkcie przestrzeni M .*

Dowód. By wykazać (2) z (1), wystarczy obliczyć objętości A, B, C, D wewnątrz układu współrzędnych (x_1, \dots, x_m) spełniającego $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$ w którym forma objętości Ω przyjmuje postać $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$. Taki układ istnieje dzięki lokalnej trywialności tkaniny \mathcal{W} . Rozpatrzmy w takich współrzędnych iloczyn kartezyjskie postaci $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$, gdzie $C_k \subseteq \mathbb{R}^{c_k}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ oraz $\sum_{k=1}^n c_k = m$. Mają

one tą własność, że dla form objętości $\Omega_k = dx_{m_k+1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_{k+1}}$ na \mathbb{R}^{c_k} , gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_l = \sum_{\alpha=1}^l c_\alpha$ dla $l = 1, 2, \dots, n$, zachodzi twierdzenie Fubiego

$$\text{Vol}^\Omega(C) = \prod_{k=1}^n \text{Vol}^{\Omega_k}(C_k). \quad (2.3.31)$$

Gdy $C_i = A_i \cup B_i$ oraz $C_j = A_j \cup B_j$, zbiór C można zapisać jako sumę mnogościową czterech zbiorów $D_{AA}, D_{AB}, D_{BA}, D_{BB}$, gdzie dla zmiennych X, Y przebiegających symbole A, B zbiór D_{XY} definiuje się jako

$$D_{XY} = C_1 \times \cdots \times C_{i-1} \times X_i \times C_{i+1} \times \cdots \times C_{j-1} \times Y_j \times C_{j+1} \times \cdots \times C_n. \quad (2.3.32)$$

Dla takich zbiorów zachodzi

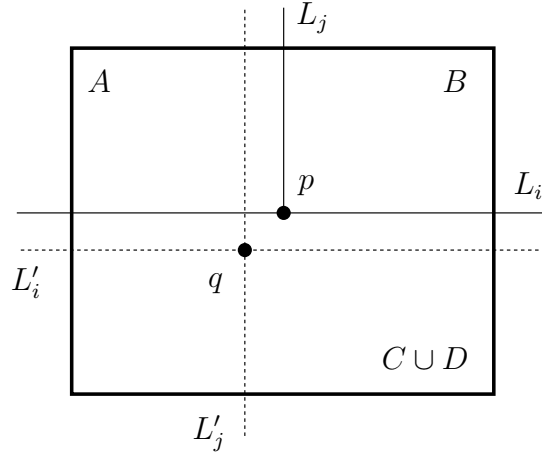
$$\begin{aligned} & \text{Vol}^\Omega(D_{AA}) \text{Vol}^\Omega(D_{BB}) \\ &= \text{Vol}^{\Omega_i}(A_i) \text{Vol}^{\Omega_j}(A_j) \prod_{k \neq i, j} \text{Vol}^{\Omega_k}(C_k) \cdot \text{Vol}^{\Omega_i}(B_i) \text{Vol}^{\Omega_j}(B_j) \prod_{k \neq i, j} \text{Vol}^{\Omega_k}(C_k) \\ &= \text{Vol}^{\Omega_i}(A_i) \text{Vol}^{\Omega_j}(B_j) \prod_{k \neq i, j} \text{Vol}^{\Omega_k}(C_k) \cdot \text{Vol}^{\Omega_i}(B_i) \text{Vol}^{\Omega_j}(A_j) \prod_{k \neq i, j} \text{Vol}^{\Omega_k}(C_k) \\ &= \text{Vol}^\Omega(D_{AB}) \text{Vol}^\Omega(D_{BA}). \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

W naszym przypadku $n = m$, a także $C = K$ oraz $C_k = [q_k, q'_k]$ dla pewnych $q, q' \in \mathbb{R}^m$, gdzie $k = 1, 2, \dots, m$. Ponadto liście

$$\begin{aligned} L_i &= \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i = p_i\}, \\ L_j &= \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_j = p_j\}, \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

dzielią K na zbiory $D_{AA} = A, D_{AB} = B, D_{BB} = C$ oraz $D_{BA} = D$ w taki sposób, że we wprowadzonej wyżej notacji $A_i = [q_i, p_i], A_j = [p_j, q'_j], B_i = [q_j, p_j]$ oraz $B_j = [p_j, q'_j]$. Przyjmując te dane we wzorze ogólnym (2.3.33) otrzymujemy równość $ac = bd$ dla Ω -objętości a, b, c, d zbiorów A, B, C, D , co należało wykazać. Mając to, warunek (3) wynika natychmiast z (2) w oparciu o elementarną algebrę.

By wykazać własność (4) z warunku (3) zastosujemy indukcję względem liczby k . Bazą indukcji jest przypadek $k = 1$, którego prawdziwość wynika z twierdzenia o wartości pośredniej. Jeżeli $K = [a, b]$ dla $a, b \in \mathbb{R}^m$ w pewnym ustalonym układzie współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) spełniającym $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, to stosując wspomniane twierdzenie do funkcji ciągłej $t \mapsto \int_{[a, b_t]} \Omega$ dla $b_t = (b_1, \dots, b_{i-1}, t, b_{i+1}, \dots, b_m)$ możemy odnaleźć podobszar $C \subseteq K$, którego Ω -objętość jest równa połowie Ω -objętości K , gdzie $[a, b_t]$ traktujemy jako niepusty zorientowany łańcuch w zgodzie z Definicją 2.25.



Rysunek 2.4: Ilustracja dowodu implikacji z warunku (4) do (3). Jeżeli $p \neq q$, to zachodzi ściśle zawieranie pomiędzy niektórymi podobszarami.

Założmy teraz, że obszar K dzieli się wzdłuż otwartych podzbiorów liści $L_i \in \mathcal{F}_i$ na 2^k podobszarów K_j o równych Ω -objętościach dla $i = 1, \dots, k$ oraz $j = 1, \dots, 2^k$. Wybierzmy jeden z podobszarów K_{j_0} i zastosujmy argument użyty do wykazania bazy indukcji, by odnaleźć liść L_{k+1} foliacji \mathcal{F}_{k+1} dzielący każdy obszar K_j na dwa podobszary A_j, B_j o Ω -objętościach a_j, b_j w taki sposób, by $a_{j_0} = b_{j_0}$. Ponieważ równość $a_j + b_j = a_{j_0} + b_{j_0}$ zachodzi w każdym podobszarze K_j , z warunku (3) otrzymujemy $a_j = b_j = a_{j_0} = b_{j_0}$ dla wszystkich podobszarów K_j , dla których istnieje ciąg $K_{j_1}, K_{j_2}, \dots, K_{j_l} = K_j$ taki, że $K_{j_{i-1}}$ przylega do K_{j_i} dla $i = 1, 2, \dots, l$ oraz $l \in \mathbb{N}$. W ten sposób wyczerpujemy wszystkie podobszary, co dowodzi kroku indukcyjnego, kończąc jednocześnie dowód własności (4).

Wykażemy teraz implikację przeciwną z (4) do (3). Aby to zrobić, założmy, że $a + b = c + d$, a następnie ustalmy układ współrzędnych (x_1, \dots, x_m) spełniający $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$ określony na zbiorze otwartym U zawierającym K . W tych współrzędnych zachodzą zawierania $L_i \subseteq \{x_i = p_i\}$ oraz $L_j \subseteq \{x_j = p_j\}$. Z założenia istnieją dwa inne podzbiory otwarte liści $L'_i \subseteq \{x_i = q_i\} \in \mathcal{F}_i$ oraz $L'_j \subseteq \{x_j = q_j\} \in \mathcal{F}_j$ dzielące K na podobszary E_1, E_2, E_3, E_4 o tych samych Ω -objętościach równych $e \in \mathbb{R}_+$. Stąd, że $A \cup B \cup C \cup D = K = \bigcup_{k=1}^4 E_k$, otrzymujemy $e = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$, co przy założeniu $a + b = c + d$ prowadzi do $a + b = c + d = 2e$. Równość ta pociąga za sobą $p_i = q_i$ ze ściślejszej monotoniczności zorientowanej objętości obszaru $[p, x]$ względem zmiennej x_i dla $x = (x_1, \dots, x_m)$. Ponieważ $a = b = e$, podobnie otrzymujemy również $p_j = q_j$. Zatem

$L_i, L'_i \subseteq \{x_i = p_i\}$ oraz $L_j, L'_j \subseteq \{x_j = p_j\}$, co pociąga za sobą $A = E_1, B = E_2, C = E_3$ and $D = E_4$ po ewentualnej permutacji indeksów (Rysunek 2.4). Podobszary A, B, C, D istotnie mają identyczne Ω -objętości.

By wykazać, że możliwość cięcia obszarów ograniczonych przez liście na podobszary równej objętości w sensie warunku (3) trywializuje holonomię (5), wybierzmy punkt $p \in M$, układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) o środku w p określony na zbiorze otwartym W spełniający $T\mathcal{F}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, otwarte otoczenie $V \subseteq W$ punktu p postaci współrzędnościowej $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$ takie, by każde odbicie unimodularne $r_{p,i} : V \rightarrow W$ względem foliacji \mathcal{F}_i dla $i = 1, 2, \dots, m$ było dobrze określone i jednoznacznie wyznaczone w sensie Lematu 2.27, oraz otoczenie $U \subseteq V$ punktu p takie, by wszystkie czterokrotne złożenia odbić unimodularnych obcięte do zbioru U miały swój obraz wewnątrz V . Naszym celem jest pokazać, że dla ustalonych indeksów $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$ równość $\ell_{p,i,j}(q) = q$ zachodzi dla wszystkich $q \in U$. Z ciągłości $\ell_{p,i,j}$ wystarczy rozpatrywać jedynie punkty q nie leżące na żadnym z liści $L_i \in \mathcal{F}_i$ tkaniny \mathcal{W} przecinających p .

Niech $q' = r_{p,i}(q)$. Obszary $A = [p, q]$ oraz $B = [p, q']$ ograniczone liśćmi tkaniny \mathcal{W} są dobrze określone i zawarte w V (ponieważ V jest kostką współrzędnościową), przyległe wzdłuż liścia $L_i \in \mathcal{F}_i|_V$ przecinającego p oraz posiadające te same Ω -objętości $\varepsilon > 0$. Oznaczmy przez L_j liść foliacji $\mathcal{F}_j|_V$ przecinający p . W kolejnym kroku odnajdziemy liść \tilde{L} foliacji $\mathcal{F}_j|_U$ taki, że obszar R przyległy do $A \cup B$ wzdłuż L_j , którego przeciwległa do L_j ściana zawarta jest w liściu \tilde{L} , ma Ω -objętość co najmniej 2ε .

Jeden z liści $L_u, L_v \in \mathcal{F}_j|_V$ przecinających punkty $u = r_{p,j}(q)$ oraz $v = r_{p,j}(q')$ odpowiednio spełnia to kryterium. By to zobaczyć, oznaczmy odpowiadające im obszary przez R_u, R_v i załóżmy, że Ω -objętość r_u, r_v jednego z tych obszarów wynosi mniej niż 2ε (bez utraty ogólności przyjmijmy, że $r_u \leq r_v$). Liść L_i dzieli R_u na podobszary $S_u = [p, u], T_u$ oraz R_v na podobszary $S_v, T_v = [p, v]$. Z Definicji 2.28 objętości s_u, t_v względem formy Ω obszarów S_u, T_v odpowiednio wynoszą dokładnie ε . W tym wypadku nierówność $r_u \leq 2\varepsilon$ implikuje, że Ω -objętość t_u obszaru T_u jest mniejsza niż ε .

Zauważmy, że wzajemne położenie rozpatrywanych podobszarów wymusza $T_u \subseteq T_v$ lub $T_v \subseteq T_u$. Nierówność $t_u < t_v = \varepsilon$ wyklucza jedno z zawieraniań, pozostawiając $T_u \subseteq T_v$, co prowadzi jednocześnie do $S_u \subseteq S_v$. Dzięki temu, że $\varepsilon = s_u \leq s_v$, otrzymujemy zatem $r_v = s_v + t_v = s_v + \varepsilon \geq 2\varepsilon$. Możemy więc przyjąć $\tilde{L} = L_v$ oraz $R = R_v$.

Teraz, posługując się twierdzeniem o wartości pośredniej zastosowanym do funkcji

ciągłej $t \mapsto \int_{R_t} \Omega$, gdzie obszar R_t ma postać $\prod_{k < i} [q_k, q'_k] \times [p_i, t] \times \prod_{k > i} [q_k, q'_k]$ zgodnie z notacją wprowadzoną w Definicji 2.25, możemy dobrać taki liść $L \in \mathcal{F}_j$, by zmniejszyć obszar R do podobszaru E przyległego do $A \cup B$ wzdłuż L_i o Ω -objętości równej dokładnie 2ε . Obszar ten dzielimy liściem L_j na podobszary C, D przyległe kolejno do B, A o odpowiednich Ω -objętościach c, d . Ponieważ $a = b = \varepsilon$ oraz $c + d = 2\varepsilon$, możemy zastosować warunek (3) by otrzymać $c = d = \varepsilon$. Zawieranie $A \cup B \cup C \cup D \subseteq V$ oraz własność dobrej określoności i jednoznaczności odbić unimodularnych na V w sensie Lematu 2.27 oznacza, że $C = [p, q'']$ dla $q'' = r_{p;j}(q')$, $D = [p, q^{(3)}]$ dla $q^{(3)} = r_{p;i}(q'')$ oraz $A = [p, q] = [p, q^{(4)}]$ dla $q^{(4)} = r_{p;j}(q^{(3)})$, a więc $q = q^{(4)} = \ell_{p;i,j}(q)$ niezależnie od $i, j = 1, 2, \dots, m$. Odwzorowania $\ell_{p;i,j}$ generują grupę holonomii w p , więc ich trywialność pociąga za sobą trywialność holonomii \mathcal{W} w p , kończąc dowód własności (5).

Założmy teraz prawdziwość warunku (5), czyli trywialność holonomii unimodularnej w każdym punkcie $p \in M$. Ponieważ pętle unimodularne $\ell_{p;i,j}$ są odwzorowaniami identyfikacyjnymi dla wszystkich $p \in M$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, m$, wyrazy rzędu większego niż 1 w ich rozwinięciach Taylora znikają. Zgodnie z Lematem 2.35, wśród nich znajdują się wszystkie współczynniki $\kappa_{ij}(p)$ tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega) = \sum_{i \neq j} \kappa_{ij} dx_i dx_j$ w punkcie p , występujące tam jako współczynniki przy wyrazach rzędu 3. Stąd wynika, że tensor niejednorodności znika w dowolnie wybranym punkcie $p \in M$, co jest tożsame z warunkiem (6).

Ostatnia implikacja z (6) do (1) to dokładnie teza Twierdzenia 1.2. □

Uwaga. Dzięki temu, że warunki (1), (5) and (6) są warunkami całkowicie lokalnymi, w sformułowaniu powyższego twierdzenia możemy zastąpić warunki (2), (3), (4) ich wersjami zlokalizowanymi (2'), (3'), (4'), w których wyrażenie "dowolny obszar K ograniczony przez liście" zastępujemy przez "dowolny dostatecznie mały obszar K ograniczony przez liście". Zasadność tego stwierdzenia staje się jasna po dokładnym prześledzeniu dowodów implikacji pomiędzy warunkami (2), (3), (4) oraz (5) – można je przenieść na przypadek lokalny niemal bez żadnych zmian.

Sformułujemy teraz analogon warunku Tabachnikova (2) z Twierdzenia 2.36 w postaci ilościowej, co pozwoli nam powiązać informację o kształcie tensora niejednorodności bezpośrednio ze stopniem niespełnienia warunku lokalnej trywialności ([48, Fig. 2.], Rysunek 2.3).

Twierdzenie 2.37. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ będzie m -tkaniną kowymiary 1 na (M, Ω) oraz niech $p \in M$. Ustalmy dwie różne liczby $i, j = 1, 2, \dots, m$ oraz układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) o środku w p określony na zbiorze otwartym U i spełniający $T\mathcal{F}_k = \ker dx_k$ dla $k = 1, 2, \dots, m$. Dla danych dostatecznie małych $u, v \in \mathbb{R}^m$ określających obszar $K = [u, v] \subseteq U$ ograniczony przez liście tkaniny \mathcal{W} oraz dwóch liści $L_i = \{x_i = p_i\} \in \mathcal{F}_i$, $L_j = \{x_j = p_j\} \in \mathcal{F}_j$ dzielących K na cztery podobszary A, B, C, D postaci współrzędnościowej

$$A = K \cap \{x_i \leq p_i\} \cap \{x_j \geq p_j\}, \quad B = K \cap \{x_i \geq p_i\} \cap \{x_j \geq p_j\}, \quad (2.3.35)$$

$$D = K \cap \{x_i \leq p_i\} \cap \{x_j \leq p_j\}, \quad C = K \cap \{x_i \geq p_i\} \cap \{x_j \leq p_j\},$$

Ω -objętości a, b, c, d kolejnych podobszarów A, B, C, D spełniają

$$ac < bd \quad \text{jeżeli} \quad \kappa_{ij} > 0, \quad ac > bd \quad \text{jeżeli} \quad \kappa_{ij} < 0, \quad (2.3.36)$$

gdzie κ_{ij} to współczynniki tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p = \sum_{k \neq l} \kappa_{kl} dx_k dx_l$ w punkcie $p \in M$.

Dowód. Wpierw udowodnimy powyższe twierdzenie w przypadku 2-tkanin $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kowymiary 1 na (M, Ω) , gdzie współrzędne (x, y) o środku $p \in M$ na zbiorze U spełniające $T\mathcal{F} = \ker dx$, $T\mathcal{G} = \ker dy$ są znormalizowane w sensie Lematu 2.22. W takim układzie współrzędnych forma objętości przyjmuje postać $\Omega = h(x, y) dx \wedge dy$, gdzie $h(x, 0) = h(0, y) = 1$. Oznaczmy przez κ jedyny niezerowy współczynnik tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p = \kappa dx dy$ w punkcie p . Funkcja $h(x, y)$ zapisuje się we współrzędnych jako

$$h(x, y) = 1 + \kappa xy + g(x, y)xy \quad (2.3.37)$$

dla pewnej ciągłej funkcji g znikającej w zerze. Wynika stąd, że dla ustalonego $\varepsilon > 0$ i wystarczająco małego $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$\left| \int_{[0, u]} \Omega - (u_1 u_2 + \frac{1}{4} \kappa u_1^2 u_2^2) \right| < \frac{1}{4} \varepsilon u_1^2 u_2^2. \quad (2.3.38)$$

Dobierzmy $\varepsilon > 0$ w taki sposób, by $|\kappa| > \varepsilon$. Załóżmy, że $K = [u, v]$ dla pewnych $u_1, u_2 > 0$, $v_1, v_2 < 0$, oraz że u_1, u_2, v_1, v_2 są na tyle blisko 0, by dowolny $(x, y) \in K$ spełniał (2.3.38) oraz $1 + (\kappa \pm \varepsilon)xy > 0$. Ponieważ $A = [v_1, 0] \times [0, u_2]$, $B = [0, u_1] \times [0, u_2]$, $C = [0, u_1] \times [v_2, 0]$ oraz $D = [v_1, 0] \times [v_2, 0]$, odpowiadające im Ω -objętości a, b, c, d spełniają

$$\begin{aligned} bd - ac &= \int_B \Omega \cdot \int_D \Omega - \int_A \Omega \cdot \int_C \Omega \\ &> (u_1 u_2 + \frac{1}{4} (\kappa - \varepsilon) u_1^2 u_2^2) \cdot (v_1 v_2 + \frac{1}{4} (\kappa - \varepsilon) v_1^2 v_2^2) \\ &\quad - (v_1 u_2 + \frac{1}{4} (\kappa - \varepsilon) v_1^2 u_2^2) \cdot (u_1 v_2 + \frac{1}{4} (\kappa - \varepsilon) u_1^2 v_2^2) \\ &= \frac{1}{4} u_1 u_2 v_1 v_2 (u_1 - v_1)(u_2 - v_2)(\kappa - \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

i podobnie

$$bd - ac < \frac{1}{4}u_1u_2v_1v_2(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)(\kappa + \varepsilon). \quad (2.3.40)$$

Stąd, że $u_1u_2v_1v_2(u_1 - v_1)(u_2 - v_2) > 0$, znak wyrażenia $bd - ac$ pokrywa się ze znakiem κ , co należało wykazać w tym specjalnym przypadku.

Ten sam wynik zachodzi niezależnie od wyboru układu współrzędnych (x, y) spełniającego $T\mathcal{F} = \ker dx$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dy$, gdyż każdy taki układ można przekształcić do układu znormalizowanego (\tilde{x}, \tilde{y}) kładąc $\tilde{x} = \int_0^x h(t, 0)dt$ oraz $\tilde{y} = h(0, 0)^{-1} \cdot \int_0^y h(0, s)ds$ jak w Lemacie 2.22. W wyniku tego przekształcenia współczynnik tensora niejednorodności przekształca się z κ na $\tilde{\kappa} = \kappa/h(0, 0)$ w układzie znormalizowanym. Współczynnik ten może zmienić znak w zależności od znaku funkcji $h(x, y)$ w zerze – gdy jest on ujemny, dochodzi do zmiany orientacji przestrzeni w wyniku odbicia względem zmiennej y , co zamienia ze sobą miejscami położenia par obszarów A, D oraz B, C . Mówiąc bardziej formalnie: aby w tej sytuacji oznaczenia w sformułowaniu twierdzenia odzwierciedlały dobrze położenie obszarów w układzie znormalizowanym, należy przyjąć $\tilde{A} = D, \tilde{B} = C, \tilde{C} = B$ oraz $\tilde{D} = A$. Wtedy implikacja $\tilde{\kappa} > 0 \implies \tilde{a}\tilde{c} > \tilde{b}\tilde{d}$ dla objętości $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ kolejnych obszarów $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ jest tożsama z $\kappa < 0 \implies db > ca$ po zamianie oznaczeń i uwzględnieniu znaku $h(0)$, co w połączeniu z podobnym argumentem w przypadku ujemnego znaku $\tilde{\kappa}$ dowodzi, że teza twierdzenia zachodzi również w nieznormalizowanym układzie współrzędnych (x, y) .

Mając to, udowodnimy twierdzenie dla dowolnych m -tkanin \mathcal{W} kowymiaru 1. Wpierw wyrażmy formę Ω w układzie współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_m) przez $\Omega = h(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ dla pewnej funkcji gładkiej $h \in C^\infty(M)$ nieznikającej w U . Dla prostoty zapisu przyjmijmy bez utraty ogólności $i = 1$ oraz $j = 2$, a następnie zdefiniujmy na pewnym podzbiore otwartym płaszczyzny 2-tkaninę \mathcal{W}_2 kowymiaru 1 wraz z rodziną form objętości $\Omega_{\alpha, \beta}$ zależną w sposób ciągły od parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n-2}$ w następujący sposób. Niech \mathcal{U} będzie obrazem zbioru U przy rzutowaniu $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2) = (x, y)$ oraz niech \mathcal{F}, \mathcal{G} będą foliacyjami generowanymi przez dystrybucje styczne $\ker dx, \ker dy$ odpowiednio. Niech $h_{\alpha, \beta}$ oznacza całkę z funkcji h po włóknach rzutowania

$$h_{\alpha, \beta}(x, y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 h(x, y, \lambda_1(t_1), \dots, \lambda_{m-2}(t_{m-2})) dt_{m-2} \dots dt_1, \quad (2.3.41)$$

gdzie $\lambda_k(t) = \alpha_k + t(\beta_k - \alpha_k)$ dla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2})$ oraz $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-2})$. Wspomniana wyżej tkanina \mathcal{W}_2 określona jest na zbiorze \mathcal{U} jako para $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, podczas gdy

formy objętości $\Omega_{\alpha,\beta}$ definiujemy jako

$$\Omega_{\alpha,\beta} = h_{\alpha,\beta}(x, y) dx \wedge dy. \quad (2.3.42)$$

Z postaci funkcji $h_{\alpha,\beta}$ zawartej w (2.3.41) wynika wprost, że $\Omega_{\alpha,\beta}$ zależy w sposób gładki od $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m-2}$.

Weźmy dwa dowolne punkty $u, v \in U$ i wyrażmy je jako $u = (q, \alpha)$ oraz $v = (q', \beta)$ dla $q, q' \in \mathbb{R}^2$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m-2}$. Gdy $\alpha_k \neq \beta_k$ dla wszystkich $k = 1, \dots, m-2$, to przez podstawienie $s_k = \lambda_k(t_k)$ dla $k = 1, 2, \dots, m-2$ wewnątrz całki (2.3.41) uzyskujemy

$$\int_{[q,q']} \Omega_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-2} (\alpha_k - \beta_k)} \int_{[u,v]} \Omega, \quad (2.3.43)$$

gdzie każdy przedział postaci $[a, b]$ traktujemy jako zorientowany łańcuch w sensie Definicji 2.25. Z drugiej strony, biorąc $\alpha = \beta$ docieramy do równości $h_{\alpha,\beta}(x, y) = h(x, y, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2})$. Bezpośredni rachunek bazujący na tej równości potwierdza, że zgodnie z Definicją 1.3 tensor niejednorodności tkaniny \mathcal{W}_2 w zerze względem formy $\Omega_{0,0}$ to dokładnie $\kappa_{ij} = \kappa_{12} = (\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \log|h|)(0)$. Stąd, że $h_{\alpha,\beta} \in C^\infty(\mathcal{U})$ zależy w sposób ciągły od $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m-2}$, współczynnik $\tilde{\kappa}_{\alpha,\beta}$ tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}_2, \Omega_{\alpha,\beta}) = \tilde{\kappa}_{\alpha,\beta} dx dy$ tkaniny \mathcal{W}_2 względem $\Omega_{\alpha,\beta}$ również zależy od α, β w sposób ciągły. Dzięki temu znak $\kappa_{\alpha,\beta}$ jest stale równy znakowi κ_{ij} dla α, β leżących w pewnym otoczeniu zera. Co więcej, obszary A, B, C, D są postaci $[p, u_k]$ dla pewnych $u_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2, 3, 4$, które różnią się jedynie na i -tej oraz j -ej współrzędnej, a więc zgodnie z (2.3.36) spełnione są tożsamości

$$\text{Vol}^\Omega(E) = \text{Vol}^{\Omega_{0,\alpha}}(\tilde{E}) \quad \text{dla } E = A, B, C, D, \quad (2.3.44)$$

gdzie $\tilde{E} = \pi(E)$ jest rzutem wzdłuż $\pi : U \rightarrow \mathcal{U}$ na zbioru E na współrzędne (x_i, x_j) , oraz $\alpha = ((u_k)_1, \dots, (\hat{u}_k)_i, \dots, (\hat{u}_k)_j, \dots, (u_k)_m)$ niezależnie od $k = 1, 2, 3, 4$, gdzie daszek oznacza pominięcie współrzędnej. To redukuje zagadnienie do przypadku dwuwymiarowego rozstrzygniętego w pierwszej części dowodu. Z jego pomocą otrzymujemy natychmiast, że nierówność (2.3.36) jest spełniona dla obszarów ograniczonych przez liście tkaniny \mathcal{W} postaci $K = [u, v]$ dla dostatecznie małych $u, v \in \mathbb{R}^m$. \square

2.3.4 Warunki geometryczne w wyższych kowymiarach

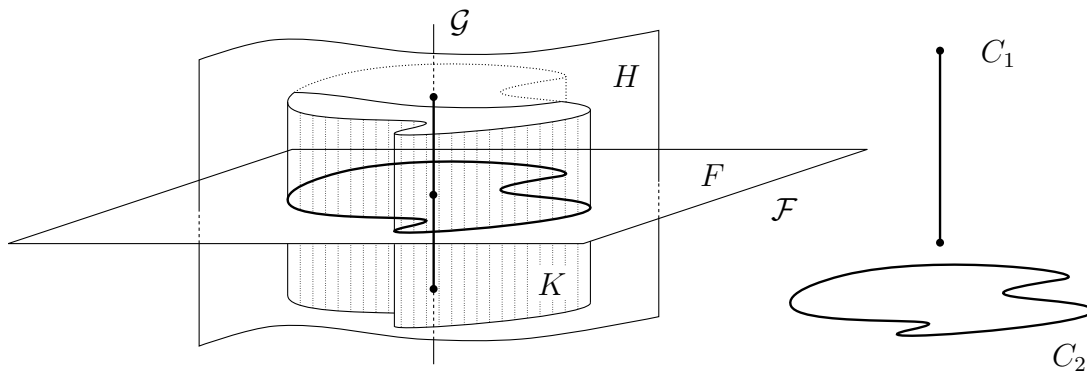
Poniższa definicja służy za jedno z możliwych rozszerzeń Definicji 2.25 oraz 2.26 na przykład tkanin wyższych kowymiarów (Rysunek 2.5).

Definicja 2.38. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną określoną na m -wymiarowej rozmaitości gładkiej M , która spełnia warunek $\sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_i = m$. Przyjmijmy $c_i = \text{codim } \mathcal{F}_i$, $m_1 = 0$ oraz $m_{i+1} = \sum_{k=1}^i \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Zbiór zwarty $C \subseteq M$, który w pewnym układzie współrzędnych spełniającym $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$ przyjmuje postać iloczynu kartezjańskiego $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$ spójnych podzbiorów $C_j \subseteq \mathbb{R}^{c_j}$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, nazwiemy *obszarem ograniczonym przez liście tkaniny* \mathcal{W} . Dwa takie obszary A, B są *przyległe wzdłuż liści foliacji* \mathcal{F}_i dla pewnego ustalonego $i = 1, 2, \dots, n$, gdy

- (1) $A \cup B$ jest również obszarem ograniczonym przez liście tkaniny \mathcal{W} , oraz
- (2) $A \cap B$ jest domkniętym podzbiorem hiperpowierzchni gładkiej $L \subseteq M$ spełniającej $T\mathcal{F}_i \subseteq TL$.

W tym wypadku mówimy, że *hiperpowierzchnia* L *dzieli obszar* $A \cup B$ na podobszary A, B .

Rozszerzenie pojęcia holonomii unimodularnej tkaniny $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m)$ kowymiaru 1 (Definicja 2.33) na tkaniny wyższego kowymiaru umotywowane jest spostrzeżeniem, że wartości poszczególnych współczynników tensora niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}_1, \Omega)|_p$ w punkcie $p \in M$ względem ustalonej formy objętości $\Omega \in \Omega^m(M)$ są w całości zdeterminowane przez zachowanie pętli unimodularnych $\ell_{p;i,j}$ względem foliacji $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j$ zakotwiczonych w punkcie p dla $i, j = 1, 2, \dots, m$ (Definicja 2.31), co wynika wprost z Lematu 2.35. Gdy mamy do czynienia z tkaniną $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ dowolnego kowymiaru, to z dowolnym układem współrzędnych $\varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ spełniającym $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ możemy związać lokalną tkaninę $\mathcal{W}_\varphi = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m)$ kowymiaru 1 o foliacjach generowanych przez dystrybucje styczne $T\mathcal{G}_k = \ker dx_k$. Tensory niejednorodności obu tkanin wiąże Twierdzenie 2.17. Orzeka ono w szczególności, że współczynniki obu tensorów wyrażonych przy pomocy notacji wprowadzonej we wzorze (2.1.4) przez $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p = \sum_{i \not\sim j} \kappa_{ij} dx_i dx_j$ oraz $\mathcal{K}(\mathcal{W}_\varphi, \Omega)|_p = \sum_{i \neq j} \tilde{\kappa}_{ij} dx_i dx_j$ spełniają $\kappa_{ij} = \tilde{\kappa}_{ij}$ dla wszystkich $i, j = 1, 2, \dots, m$ takich, że $i \not\sim j$. Przyjmując za $\ell_{p;i,j}$ pętle unimodularne względem foliacji $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j$ tkaniny \mathcal{W}_φ zakotwiczone w ustalonym punkcie $p \in M$, odczytanie $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ sprowadza się zatem do badania wyrazów rzędu 3 w rozwinięciach Taylora tych spośród kielków $\ell_{p;i,j}$, dla których $i \not\sim j$. Rozumowanie to prowadzi nas do następującej definicji.



Rysunek 2.5: Obszar K ograniczony przez liście tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określonej na \mathbb{R}^3 , gdzie $\text{codim } \mathcal{F} = 1$ oraz $\text{codim } \mathcal{G} = 2$. Zbiór K przyjmuje postać $C_1 \times C_2$ we współrzędnych prostujących \mathcal{W} . Hiperpowierzchnie F and H spełniające $T\mathcal{F} = TF$ oraz $T\mathcal{G} \subseteq TH$ dzielą ten obszar na podobszary.

Definicja 2.39. Niech M będzie m -wymiarową rozmaitością gładką wyposażoną w nigdzie nieznikającą formę objętości $\Omega \in \Omega^m(M)$, niech $p \in M$ będzie ustalonym punktem oraz niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) . Przyjmijmy $m_1 = 0$ oraz $m_j = \sum_{k=1}^j \text{codim } \mathcal{F}_k$ dla $j = 1, 2, \dots, n$ i rozważmy układ współrzędnych $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_m)$ o środku w punkcie p określony na zbiorze otwartym U_φ spełniający $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$. Dla każdego takiego układu określmy na zbiorze U_φ tkaninę $\mathcal{W}_\varphi = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m)$ kowymiaru 1 której foliacje \mathcal{G}_i generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{G}_i = \ker dx_i$ dla $i = 1, \dots, m$.

- (1) Najmniejszą podgrupą normalną $\mathcal{H}_{p;\varphi}$ grupy $\mathcal{R}_{p;\varphi}$ generowanej przez wszystkie odbicia unimodularne tkaniny \mathcal{W}_φ w punkcie $p \in M$ zawierającą wszystkie pętle unimodularne $\ell_{p;i,j}$ względem foliacji $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j$ tkaniny \mathcal{W}_φ dla tych par $i, j = 1, 2, \dots, m$, które zgodnie z notacją wprowadzoną w (2.1.4) spełniają $i \not\sim j$, nazwiemy *grupą unimodularnej holonomii tkaniny \mathcal{W} w punkcie p względem współrzędnych φ* .
- (2) Niech \mathcal{H}_p będzie grupą generowaną przez sumę mnogościową wszystkich grup $\mathcal{H}_{p;\varphi}$, gdzie φ przebiega wszystkie układy współrzędnych (x_1, \dots, x_m) o środku w $p \in M$ spełniające $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, oraz niech ψ będzie ustalonym układem współrzędnych tej postaci. Zdefiniujmy $\psi_* : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_{\psi(p)}$ wzorem $\psi_*(f) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$. Klasa sprzężoności grupy $\psi_*\mathcal{H}_p$ wewnątrz grupy wszystkich kielków dyfeomorfizmów w zerze przestrzeni \mathbb{R}^m nosi nazwę *holonomii unimodularnej tkaniny \mathcal{W} w punkcie p* .

Wprowadzone wyżej uogólnienia pozwalają nam przenieść niemal słowo w słowo Twier-

dzenie 2.36 na przypadek tkanin wyższych kowymiarów.

Twierdzenie 2.40. *Niech M będzie m -wymiarową rozmaitością gładką oraz niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ będzie n -tkaniną na (M, Ω) spełniającą $\sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{F}_i = m$. Następujące warunki są równoważne.*

- (1) *Tkanina \mathcal{W} jest lokalnie trywialna.*
- (2) *Dla każdej pary różnych indeksów $i, j = 1, 2, \dots, m$, dowolnego obszaru K ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W} i dowolnych dwóch hiperpowierzchni L_i, L_j spełniających $T\mathcal{F}_i \subseteq L_i$ oraz $T\mathcal{F}_j \subseteq L_j$, które dzielą K na cztery podobszary A, B, C, D spełniające $(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq L_i$ oraz $(A \cup D) \cap (B \cup C) \subseteq L_j$, objętości a, b, c, d obszarów A, B, C, D względem formy Ω spełniają.*

$$ac = bd. \tag{2.3.45}$$

- (3) *Dla każdej pary różnych indeksów $i, j = 1, 2, \dots, m$, dowolnego obszaru K ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W} i dowolnych dwóch hiperpowierzchni L_i, L_j spełniających $T\mathcal{F}_i \subseteq L_i$ oraz $T\mathcal{F}_j \subseteq L_j$, które dzielą K na cztery podobszary A, B, C, D spełniające $(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq L_i$ oraz $(A \cup D) \cap (B \cup C) \subseteq L_j$ o Ω -objętościach a, b, c, d związanych równościami $a + b = c + d$, równość $a = b$ implikuje $a = b = c = d$.*
- (4) *Holonomia unimodularna tkaniny \mathcal{W} w dowolnym punkcie $p \in M$ jest trywialna.*
- (5) *Tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)$ tkaniny \mathcal{W} względem Ω znika w każdym punkcie przestrzeni M .*

Uwaga. Naiwny analogon warunku (4) Twierdzenia 2.36, który brzmi „dla dowolnego obszaru K ograniczonego przez liście tkaniny \mathcal{W} oraz każdego $k = 1, 2, \dots, n$ istnieją hiperpowierzchnie L_i spełniające $T\mathcal{F}_i \subseteq TL_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ które dzielą K na 2^k podobszarów o równych Ω -objętościach”, nie jest równoważny pozostałym warunkom w powyższym twierdzeniu pomimo, że jest on spełniony przez tkaniny lokalnie trywialne. Na przykład: w kowymiarze (1,2) powyższa własność zachodzi dla wszystkich tkanin $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określonych na (M, Ω) , gdzie $\Omega \in \Omega^m(M)$ jest dowolną formą objętości. Dzieje się tak za sprawą wariantu twierdzenia Stone’a-Tukeya o kanapce z szynką, który można podsumować następująco. Obszar K dzielimy 2-wymiarowym liściem L foliacji \mathcal{F} na dwa podobszary o równych Ω -objętościach. Następnie dla każdego wektora $\vec{n} \in S_1$

prostopadłego do $T\mathcal{G}$ we współrzędnych prostujących \mathcal{W} (Stwierdzenie 1.1 wybieramy płaszczyznę współrzędnościową H ortogonalną do \vec{n} spełniającą $T\mathcal{G} \subseteq TH$ dzielącą jeden z podobszarów na podobszary o równych Ω -objętościach, by za pomocą klasycznego twierdzenia Borsuka-Ulama [27, Corollary 2B.7] odnaleźć \tilde{n} dzielący analogicznie drugi podobszar.

Dowód Twierdzenia 2.40. Dowód przebiega praktycznie tak samo jak dowód Twierdzenia 2.36 za wyjątkiem kilku miejsc, w których wymaga on pewnych istotnych modyfikacji. Poniżej krótko opiszemy cały proces.

Implikacje od (1) przez ((2)) aż do (3) oraz z (5) do (1) wykazuje się w ten sam sposób co ich odpowiedniki w kowymiarze 1.

By wykazać (4) z warunku (3) zauważmy, że holonomia w ogólnym kowymiarze generowana jest przez sprzężenia grupy holonomii unimodularnej $\mathcal{H}_{p;\varphi}$ w pewnym ustalonym układzie $\varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ prostującym \mathcal{W} określonej w Definicji 2.39. Wystarczy zatem strywializować grupę $\mathcal{H}_{p;\varphi}$ dla każdego takiego układu współrzędnych φ dowodząc tak samo jak w implikacji z warunku (3) do warunku (5) Twierdzenia 2.36, że pętle unimodularne $\ell_{p;k,l}$ wzdłuż foliacji $\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_l$ tkaniny lokalnej $\mathcal{W}_\varphi = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m)$ kowymiaru 1 zdefiniowanej przez $T\mathcal{G}_a = \ker dx_a$ dla $a = 1, 2, \dots, m$ są odwzorowaniami identycznościowymi dla kolejnych $k = m_i + 1, \dots, m_{i+1}$ oraz $l = m_j + 1, \dots, m_{j+1}$. Wykorzystując w tym dowodzie własność (3) przyjmijmy za hiperpowierzchnie L_i, L_j dzielące obszar K liście foliacji $\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_l$, które we współrzędnych (x_1, \dots, x_m) przyjmują postać poziomic funkcji x_k, x_l .

Wreszcie, przy założeniu prawdziwości warunku (4), ustalmy układ współrzędnych $\varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ na zbiorze otwartym U spełniający $T\mathcal{F}_i = \bigcap_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \ker dx_k$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, a następnie weźmy foliacje \mathcal{G}_k generowane przez dystrybucje styczne $T\mathcal{G}_k = \ker dx_k$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, które składają się na tkaninę lokalną \mathcal{W}_φ kowymiaru 1 określoną na U . Przypomnijmy teraz notację $i \sim j$ określoną we wzorze (2.1.4). Ponieważ grupa holonomii $\mathcal{H}_{p;\varphi}$ jest trywialna z założenia, pętle unimodularne $\ell_{p;i,j}$ dla $i \not\sim j$ są kielkami odwzorowań identycznościowych. W zgodzie z Twierdzeniem 2.17, równość $\mathcal{K}(\mathcal{W}, \Omega)|_p = \text{pr}_O(\mathcal{K}(\mathcal{W}_\varphi, \Omega))|_p = \sum_{i \not\sim j} \kappa_{ij} dx_i dx_j$ prowadzi do $\kappa_{ij} = 0$ dla wszystkich $i \not\sim j$ oraz $p \in M$ za sprawą Lematu 2.35. Otrzymujemy w ten sposób dokładnie warunek (5). □

2.4 Zastosowania w relatywistyce

Niech (M, g) będzie *czasoprzestrzenią*, tj. rozmaitością gładką wymiaru 4 wyposażoną w metrykę pseudoriemannowską g sygnatury $(-+++)$. W tym dziale zajmiemy się pewnymi szczególnymi 2-tkaninami \mathcal{W} powstającymi w wyniku ustalenia pojęcia *jednoczesności* na (M, g) . Przyjrzymy się ich niezmiennikom w geometrii odwzorowań zachowujących indukowany przez g element objętości $dV \in \Omega^4(M)$.

Foliację \mathcal{F} nazwiemy *przestrzennopodobną* jeżeli obcięcie metryki g do każdego spośród liści \mathcal{F} jest dodatnio określone. Oznacza to, że liście foliacji \mathcal{F} mogą być traktowane jako *hiperpowierzchnie jednoczesności* w czasoprzestrzeni (M, g) . Przypisanie każdemu zdarzeniu $p \in M$ liścia $L \in \mathcal{F}|_U$ zawierającego p wewnątrz lokalnego układu współrzędnych określonego na zbiorze otwartym U można uznać za pomiar lokalnego czasu t względem pewnego obserwatora – mówiąc nieprecyzyjnie, sam liść L reprezentuje wtedy stan świata w czasie t . Dopełnienie ortogonalne $T\mathcal{F}^\perp$ wiązki $T\mathcal{F}$ względem g jest 1-wymiarową dystrybucją styczną, a zatem $T\mathcal{F}^\perp$ całkuje się do pewnej foliacji \mathcal{F}^\perp krzywymi (koniecznie czasopodobnymi), które można interpretować jako trajektorie ruchu rodziny *obserwatorów eulerowskich*. Niech $dV = \sqrt{-\det g}$ będzie pseudoriemannowską formą objętości indukowaną przez metrykę g . W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać tkaniny postaci $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp)$ określone na rozmaitości z formą objętości (M, dV) .

Układy współrzędnych (t, x_1, x_2, x_3) prostujące \mathcal{W} , tj. takie, dla którego spełnione są $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^3 \ker dx_i$ oraz $T\mathcal{F}^\perp = \ker dt$, noszą nazwę *współrzędnych normalnych (eulerowskich)* [25]. W tych współrzędnych tensor metryczny rozkłada się na sumę

$$g = -\alpha^2 dt^2 + \gamma, \quad (2.4.1)$$

gdzie współrzędna t parametryzuje liście foliacji \mathcal{F} , współczynnik α jest tzw. *funkcją lapsu*, podczas gdy γ jest dodatnio określoną metryką na $T\mathcal{F}$. W zależności od okoliczności, foliację ortogonalną można zastąpić inną foliacją krzywymi transwersalnymi do \mathcal{F} lepiej dopasowaną do napotkanej sytuacji. Powyższy wybór podyktowany jest głównie klarownością prezentacji – uogólnienie wyników uzyskanych poniżej jest jedynie kwestią przeprowadzenia bardziej wymagających rachunków.

Przykład 2.7. Rozważmy zewnątrz horyzontu zdarzeń w czasoprzestrzeni Schwarzschilda (M, g) w biegunowym układzie współrzędnych (t, r, θ, ϕ) , gdzie $M = \mathbb{R}^4 \setminus \{r \leq 2m\}$

dla pewnej dodatniej masy m , podczas gdy metryka g zadaje się wzorem

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.4.2)$$

Hiperpowierzchnie jednoczesności $\{t = c\}$ dla $c \in \mathbb{R}$ definiują foliację \mathcal{F} rozmaitości M . Jej dopełnienie ortogonalne \mathcal{F}^\perp składa się z krzywych $\{r = c_r, \theta = c_\theta, \phi = c_\phi\}$ dla $c_r, c_\theta, c_\phi \in \mathbb{R}$, co wynika wprost z diagonalnej postaci metryki g we współrzędnych. Mamy również

$$dV = r^2 \sin \theta \cdot dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\phi. \quad (2.4.3)$$

Ponieważ w tym układzie współrzędnych spełnione są $T\mathcal{F} = \ker dt$ oraz $T\mathcal{F}^\perp = \ker dr \cap \ker d\theta \cap \ker d\phi$, Twierdzenie 1.2 gwarantuje, że 2-tkanina \mathcal{W} określona na (M, dV) jest lokalnie trywialna.

Przykład 2.8. Foliacja \mathcal{F} stałego czasu T w układzie współrzędnych Gullstranda-Painlevé (T, r, θ, ϕ) na czasoprzestrzeni Schwarzschilda $(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}), g)$, w których metryka g przyjmuje postać

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dT^2 + 2\sqrt{\frac{2m}{r}} dT dr + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (2.4.4)$$

jest przestrzennopodobna. Pokażemy, że 2-tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp)$ na (M, dV) nie jest lokalnie trywialna. Aby to dowieść zauważmy wpierw, że obecny układ współrzędnych nie spełnia $T\mathcal{F}^\perp = \ker dr \cap \ker d\theta \cap \ker d\phi$. Zamieńmy zatem współrzędne na współrzędne Lemaître'a (T, R, θ, ϕ) przyjmując $R = \frac{2}{3}r^{3/2} + \sqrt{2m}T$ by sprowadzić g do postaci (2.4.1)

$$g = -dT^2 + r^{-1} dR^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad r = \left(\frac{3}{2}R - \frac{3}{2}\sqrt{2m}T\right)^{2/3}. \quad (2.4.5)$$

Nietrywialność tkaniny \mathcal{W} wynika teraz z Twierdzenia 1.2, gdyż tensor niejednorodności pary (\mathcal{W}, dV) dla formy objętości dV indukowanej przez metrykę g postaci współrzędnościowej

$$dV = \frac{3}{2}(R - \sqrt{2m}T) \sin \theta \cdot dT \wedge dR \wedge d\theta \wedge d\phi \quad (2.4.6)$$

wynosi $\mathcal{K}(\mathcal{W}, dV) = \sqrt{2m}(R - \sqrt{2m}T)^{-2} dT dR \neq 0$. W oryginalnym układzie współrzędnych Gullstrand'a-Painlevé zadaje się on wzorem

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}, dV) = \frac{9}{2}mr^{-3} dT^2 + \frac{9}{4}\sqrt{2m}r^{-5/2} dT dr. \quad (2.4.7)$$

Ponieważ $g\left(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}\right) = -1$, zmienną T można interpretować jako czas własny obserwatorów eulerowskich spadających radialnie do nierotującej, nienaładowanej czarnej dziury. W miarę zbliżania się do osobliwości tensor niejednorodności rośnie nieograniczenie.

Lokalna trywialność tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp)$ na (M, dV) ma pewne znaczenie w relatywistycznej mechanice płynów, gdzie równania ruchu płynu we współrzędnych prostujących tkaninę \mathcal{W} to m.in. prawa zachowania energii (2.4.9) i pędu (2.4.10), których postać w sposób nietrywialny zależy od formy objętości dV czasoprzestrzeni M . Prawa te, wyrażone w notacji wprowadzonej w [4, Part 11] oraz przy pomocy konwencji sumacyjnej Einsteina, redukują się do

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.4.8)$$

dla tensora energii-pędu T zgodnego z pewnymi ustalonymi związkami konstytutywnymi, gdzie ∇_α oznacza pochodną kowariantną koneksji Levi-Civity metryki g . Powyższy warunek na dywergencję tensora T wprowadza do postaci współrzędnościowej powyższego równania czynniki związane z gęstością objętości lorentzowskiej dV . Przyjmując, że indeksy zerowe rozpatrywanych pól tensorowych odpowiadają współczynnikom czasopodobnym, natomiast indeksy $i, j, k = 1, 2, 3$ – współczynnikom przestrzennopodobnym, we współrzędnych eulerowskich otrzymamy równoważny układ równań [38]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^3 \gamma^{1/2} T^{00}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha^3 \gamma^{1/2} T^{0j}) = \gamma^{1/2} \alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha\right) T^{00} - \frac{1}{2} \gamma^{1/2} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{jk}\right) T^{jk} \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^3 \gamma^{1/2} T^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha^3 \gamma^{1/2} T^{ij}) &= \frac{1}{2} \gamma^{1/2} \alpha^3 g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \alpha^2\right) T^{00} - \gamma^{1/2} \alpha^3 g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{jk}\right) T^{j0} \\ &\quad - \gamma^{1/2} \alpha^3 \Gamma_{jk}^i T^{jk} - T^{0i} \frac{\partial}{\partial t}(\gamma^{1/2} \alpha^3) \\ &\quad + 2T^{0i} \gamma^{1/2} \alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha\right) + 2\alpha^3 T^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \gamma^{1/2}\right), \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

gdzie α jest funkcją lapsu, Γ_{jk}^i to symbole Christoffela koneksji ∇_α , podczas gdy $\gamma^{1/2}$ to gęstość przestrzennopodobnego elementu objętości na $T\mathcal{F}$ indukowanego przez dV .

Jeżeli tensor niejednorodności $\mathcal{K}(\mathcal{W}, dV)$ tkaniny \mathcal{W} określonej na początku tego działu znika wszędzie, to dzięki Twierdzeniu 1.2 można odnaleźć taki układ współrzędnych (t, x_1, x_2, x_3) spełniający $T\mathcal{F} = \ker dt$ oraz $T\mathcal{F}^\perp = \bigcap_{i=1}^3 \ker x_i$, w którym gęstość elementu objętości $dV = \alpha \gamma^{1/2} dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ staje się stała. To znacznie upraszcza powyższe równania, całkowicie eliminując ich zależność od $\gamma^{1/2}$. Przy założeniu $\alpha \gamma^{1/2} = 1$ równania (2.4.9) i (2.4.10) redukują się do

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^2 T^{00}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha^2 T^{0j}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha^2\right) T^{00} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{jk}\right) T^{jk} \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^2 T^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha^2 T^{ij}) &= \frac{1}{2} \alpha^2 g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \alpha^2\right) T^{00} - \alpha^2 g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{jk}\right) T^{j0} \\ &\quad - \alpha^2 \Gamma_{jk}^i T^{jk} - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \alpha^2\right) T^{ij}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Ta postać równań bardziej sprzyja obliczeniom numerycznym. W szczególności, mniejsza liczba składników pozwala zredukować błędy numeryczne, gdy funkcja α^2 oraz współczynniki metryki γ dobrze zachowują się w nowych współrzędnych. Co więcej, gdy znamy α^2 oraz γ , pracując ze zredukowanym układem równań unikamy liczenia pierwiastków oraz wyznaczników w celu ewolucji tensora energii-pędu T w czasie. Równania można dalej uprościć, gdy przy wyborze foliacji \mathcal{F} zadamy o to, by dopełnienie ortogonalne \mathcal{F}^\perp foliacji \mathcal{F} było foliacją *całkowicie geodezyjną*. Własność ta wyrażona w terminach powyższych parametrów sprowadza się do równości $d\alpha|_{T\mathcal{F}} = 0$, co dowodzi się na podstawie tożsamości $g(\nabla_n n, v) = d \log \alpha(v)$ prawdziwej dla każdego pola wektorów normalnych $n \in T\mathcal{F}^\perp$ długości $\|n\|_g = -1$ oraz każdego $v \in T\mathcal{F}$ [25, (4.19)]. W tym wypadku liście foliacji ortogonalnej \mathcal{F}^\perp są geodezyjnymi koneksji Levi’ego-Civity. Foliację \mathcal{F} o tej własności nazywa się *cięciem geodezyjnym* czasoprzestrzeni [25, 10.2].

Zauważmy jeszcze jeden ważny, choć łatwy do przeoczenia fakt: koneksja ∇ *nie* jest w ogólności koneksją zgodną z (\mathcal{W}, dV) (Definicja 2.3). Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy obie foliacje \mathcal{F} oraz \mathcal{F}^\perp są całkowicie geodezyjne, tzn. gdy dla wszystkich $X, Z \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y, W \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$ zachodzi

$$\nabla_Z X \in \Gamma(T\mathcal{F}), \quad \nabla_W Y \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp). \quad (2.4.13)$$

Warunek ten jest równoważny równościom $d\alpha|_{T\mathcal{F}} = 0$ oraz $K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = 0$ dla $i, j = 1, 2, 3$. W konsekwencji nie zawsze możliwe jest zbadanie lokalnej trywialności tkankiny \mathcal{W} korzystając jedynie z tensora Ricciego koneksji Levi’ego-Civity, co mogą mylnie zasugerować wyniki działu 2.1.5. Jest to możliwe jedynie w pewnych wyjątkowych geometriach czasoprzestrzeni – takich, które dopuszczają podział na zmienne czasowe i przestrzenne zgodny z powyższymi równaniami na współczynniki metryki g gwarantującymi całkowitą geodezyjność foliacji $\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp$.

Rozdział 3

Niezmienniki geometryczne struktur bilagranżowskich

3.1 Definicje i podstawowe fakty

Niech (M, ω) będzie rozmaitością symplektyczną wymiaru $2n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Foliację \mathcal{F} nazywamy *foliacją lagranżowską*, jeżeli wszystkie liście L foliacji \mathcal{F} są podrozmaitościami lagranżowskimi rozmaitości (M, ω) , tj. gdy $\omega|_L = 0$ oraz $\dim L = n$. Para $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ foliacji lagranżowskich rozmaitości (M, ω) , których liście przecinają się transwersalnie w każdym punkcie $p \in M$, tworzy *2-tkaninę lagranżowską* [48] na (M, ω) . Strukturę $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ określa się mianem *struktury bilagranżowskiej* lub *rozmaitości bilagranżowskiej* [21].

Na rozmaitościach symplektycznych (M, ω) definiuje się *koneksje symplektyczne* [50, 51] jako beztorsyjne koneksje afiniczne ∇ spełniające $\nabla\omega = 0$. Każda struktura bilagranżowska $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ wyposażona jest w jednoznacznie wyznaczoną koneksję symplektyczną ∇ paralelizującą obie foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} w sensie poniższej definicji.

Definicja 3.1 ([21, 50]). Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie rozmaitością bilagranżowską. Koneksja ∇ jest *koneksją bilagranżowską struktury* $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ (lub *koneksją kanoniczną rozmaitości bilagranżowskiej* $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ [51]) jeżeli spełnione są następujące warunki:

- (1) ∇ jest *prawie symplektyczna*, tzn. $\nabla\omega = 0$ [51],
- (2) $\nabla_v\Gamma(T\mathcal{F}) \subseteq T\mathcal{F}$ oraz $\nabla_v\Gamma(T\mathcal{G}) \subseteq T\mathcal{G}$ dla każdego $v \in TM$,
- (3) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ dla każdego $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$.

Działanie koneksji bilagranżowskiej ∇ na wiązce stycznej TM jest w całości zdeterminowane własnościami (1) – (3). Działanie to można zwięźle opisać wykorzystując pewne naturalne odwzorowania wiązek indukowane przez strukturę bilagranżowską $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. Ich konstrukcję przedstawimy poniżej.

Ponieważ liście foliacji \mathcal{F} oraz \mathcal{G} są tego samego wymiaru równego $\frac{1}{2} \dim M$ oraz przecinają się transversalnie, wiązka styczna rozkłada się na sumę Whitneya dwóch podwiązek $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G}$. Oznaczmy rzutowania na kolejne składowe przez

$$\pi_{\mathcal{F}} : TM \rightarrow T\mathcal{F}; v \mapsto v_{\mathcal{F}}, \quad \pi_{\mathcal{G}} : TM \rightarrow T\mathcal{G}; v \mapsto v_{\mathcal{G}}, \quad (3.1.1)$$

gdzie $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}}$ dla wektorów $v_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}$, $v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$. Rozkład ten umożliwia naturalne utożsamienie wiązki ilorazowej $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ z wiązką $T\mathcal{G}$ oraz $\nu\mathcal{G} = TM/T\mathcal{G}$ z wiązką $T\mathcal{F}$. Co więcej, obcięcia izomorfizmu $TM \simeq T^*M$ danego wzorem $v \mapsto v \lrcorner \omega = \omega(v, \cdot)$ do wiązek $T\mathcal{F}$ oraz $T\mathcal{G}$ opuszczają się do izomorfizmów

$$\alpha : T\mathcal{F} \rightarrow (TM/T\mathcal{F})^* \simeq T^*\mathcal{G}, \quad \beta : T\mathcal{G} \rightarrow (TM/T\mathcal{G})^* \simeq T^*\mathcal{F}. \quad (3.1.2)$$

Gdy $v \in T_p\mathcal{F}$ oraz $w \in T_p\mathcal{G}$ dla pewnego $p \in M$, obrazy $\alpha(v), \beta(w)$ tych odwzorowań rzeczywiście są elementami $(TM/T\mathcal{F})^*, (TM/T\mathcal{G})^*$ odpowiednio, gdyż $(v \lrcorner \omega)(v') = (w \lrcorner \omega)(w') = 0$ dla wszystkich $v' \in T_p\mathcal{F}$ oraz $w' \in T_p\mathcal{G}$. Po identyfikacji powyższych przestrzeni dualnych z $T^*\mathcal{G}$ oraz $T^*\mathcal{F}$ za pomocą rzutowań $\pi_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{G}}$ odwzorowania α, β przyjmują postać

$$\alpha(v) = (v \lrcorner \omega)|_{T\mathcal{G}}, \quad \beta(w) = (w \lrcorner \omega)|_{T\mathcal{F}}. \quad (3.1.3)$$

To, że odwzorowania te są izomorfizmami, nietrudno zweryfikować badając $\ker \alpha$ oraz $\ker \beta$. Biorąc $v \in T\mathcal{F}$ taki, że $\alpha(v) = 0$, otrzymujemy $\omega(v, w) = 0$ dla wszystkich $w \in T\mathcal{G}$. Skoro v należy do podwiązki lagranżowskiej $T\mathcal{F}$ wiązki stycznej, równość $\omega(v, u) = 0$ zachodzi także dla $u \in T\mathcal{F}$, a więc łącznie otrzymujemy $\omega(v, u + w) = 0$ dla wszystkich wektorów $u + w \in T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G} = TM$. To natychmiast daje $v = 0$ z niezdegenerowania formy ω . Ponieważ odwzorowanie α jest monomorfizmem między wiązkami tego samego wymiaru, jest ono izomorfizmem wiązek. Dowód dla odwzorowania β przebiega niemal identycznie.

Odwzorowania α, β dane w (3.1.2) nie są niezależne. Niech $\beta^* : (T^*\mathcal{F})^* = T\mathcal{F} \rightarrow (T\mathcal{G})^*$ będzie odwzorowaniem dualnym do $\beta : T\mathcal{G} \rightarrow T^*\mathcal{F}$. Zauważmy, że dla dowolnych

$v \in T\mathcal{F}$ oraz $w \in T\mathcal{G}$ zachodzi

$$\begin{aligned}\beta^*(v)(w) &= v \lrcorner \beta(w) = v \lrcorner \omega(w, \cdot) \\ &= \omega(w, v) = -\omega(v, w) = -\alpha(v)(w).\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Rachunek ten natychmiast prowadzi do równości $\alpha = -\beta^*$.

Stwierdzenie 3.2 ([28, 50]). *Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie rozmaitością bilagranżowską oraz niech $\alpha, \beta, \pi_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{G}}$ będą odwzorowaniami określonymi w (3.1.1) oraz (3.1.2). Działanie koneksji bilagranżowskiej ∇ struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ na wiązce stycznej TM jest jedynym rozszerzeniem \mathbb{R} -liniowym wzorów*

- (a) $\nabla_{X_{\mathcal{F}}}Y_{\mathcal{G}} = \pi_{\mathcal{G}}([X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{G}}])$ dla $X_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$,
- (b) $\nabla_{X_{\mathcal{G}}}Y_{\mathcal{F}} = \pi_{\mathcal{F}}([X_{\mathcal{G}}, Y_{\mathcal{F}}])$ dla $X_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$ oraz $Y_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$,
- (c) $\nabla_{X_{\mathcal{F}}}Y_{\mathcal{F}} = \alpha^{-1}(\nabla_{X_{\mathcal{F}}}(\alpha(Y_{\mathcal{F}})))$ dla $X_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$,
- (d) $\nabla_{X_{\mathcal{G}}}Y_{\mathcal{G}} = \beta^{-1}(\nabla_{X_{\mathcal{G}}}(\beta(Y_{\mathcal{G}})))$ dla $X_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$ oraz $Y_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$.

W drugą stronę: koneksja ∇ , której działanie na wiązce stycznej jest \mathbb{R} -liniowym rozszerzeniem wzorów (a) – (d), jest dobrze określoną koneksją bilagranżowską struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Uwaga. We wzorze (c) cięcie $\nabla_X \xi$ dla dowolnej 1-formy $\xi \in \Gamma(T^*\mathcal{G})$ oraz pola $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ określa wzorem

$$\begin{aligned}(\nabla_X \xi)(w) &= X\xi(w) - \xi(\nabla_X w) \\ &= X\xi(w) - \xi(\pi_{\mathcal{G}}[X, w])\end{aligned}\quad \text{dla } w \in \Gamma(T\mathcal{G})\tag{3.1.5}$$

imitującym regułę Leibniza. Analogicznie określamy $\nabla_Y \eta$ dla $\eta \in \Gamma(T^*\mathcal{G})$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$. By definicje te były niesprzeczne z regułą Leibniza koneksji ∇ , konieczna jest poprawność wzorów (a) oraz (b). Wykażemy ją w pierwszej kolejności.

Dowód. Niech ∇ będzie koneksją bilagranżowską o własnościach (1) – (3) z Definicji 3.1. Aby uzyskać (a) oraz (b), zastosujemy kolejno rzutowania $\pi_{\mathcal{F}}$ oraz $\pi_{\mathcal{G}}$ do własności (3) koneksji bilagranżowskich. Stosując $\pi_{\mathcal{F}}$ otrzymamy równość

$$\pi_{\mathcal{G}}[X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{G}}] = \pi_{\mathcal{G}} \underbrace{\nabla_{X_{\mathcal{F}}}Y_{\mathcal{G}}}_{\in \Gamma(T\mathcal{G})} - \pi_{\mathcal{G}} \underbrace{\nabla_{Y_{\mathcal{G}}}X_{\mathcal{F}}}_{\in \Gamma(T\mathcal{F})} = \nabla_{X_{\mathcal{F}}}Y_{\mathcal{G}} - 0\tag{3.1.6}$$

dzięki własności (2) koneksji bilagranżowskich. Udowodnienie (c) oraz (d) wymaga wykorzystania reguły Leibniza dla wyrażenia $(\nabla_v \omega)(u, w)$ dla odpowiednio dobranych argumentów u, w . Wyrażenie to jest równe

$$(\nabla_v \omega)(u, w) = v\omega(u, w) - \omega(\nabla_v u, w) - \omega(u, \nabla_v w). \quad (3.1.7)$$

Kładąc $v = X_{\mathcal{F}}$ oraz biorąc dowolne cięcie $w \in \Gamma(T\mathcal{G})$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha(\nabla_{X_{\mathcal{F}}} Y_{\mathcal{F}})(w) &= \omega(\nabla_{X_{\mathcal{F}}} Y_{\mathcal{F}}, w) = X_{\mathcal{F}} \omega(Y_{\mathcal{F}}, w) - \omega(Y_{\mathcal{F}}, \nabla_{X_{\mathcal{F}}} w) - (\nabla_{X_{\mathcal{F}}} \omega)(Y_{\mathcal{F}}, w) \\ \nabla_{X_{\mathcal{F}}}(\alpha Y_{\mathcal{F}})(w) &= \nabla_{X_{\mathcal{F}}}(Y_{\mathcal{F}} \lrcorner \omega)(w) = X_{\mathcal{F}} \omega(Y_{\mathcal{F}}, w) - \omega(Y_{\mathcal{F}}, \nabla_{X_{\mathcal{F}}} w). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Przyrównanie $(\nabla_{X_{\mathcal{F}}} \omega)(Y_{\mathcal{F}}, w)$ do zera z własności (1) koneksji bilagranżowskich prowadzi do równości $\alpha(\nabla_{X_{\mathcal{F}}} Y_{\mathcal{F}}) = \nabla_{X_{\mathcal{F}}}(\alpha Y_{\mathcal{F}})$, która jest tożsama ze wzorem (c) z uwagi na odwracalność α . Wzór (d) dowodzi się analogicznie.

Niech teraz ∇ będzie koneksją o działaniu danym przez \mathbb{R} -liniowe rozszerzenie wzorów (a) – (d). Zauważmy, że dla dowolnej 1-formy $\xi \in \Gamma(T^*\mathcal{G})$ oraz pola wektorowego $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ forma $\nabla_X \xi$ dana wzorem (3.1.5) jest dobrze określonym cięciem wiązki $T^*\mathcal{G}$, a więc możliwe jest przyłożenie do niej odwzorowania α^{-1} zgodnie ze wzorem (c). To, wraz z analogicznym faktem dla pary $\eta \in \Gamma(T^*\mathcal{F}), Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$ dowodzi, że złożenia we wzorach (c), (d) mają sens. Definicja koneksji ∇ jest zatem poprawna. Z jednoznaczności rozkładu pól wektorowych $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ na sumy $X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{G}}$ oraz $Y_{\mathcal{F}} + Y_{\mathcal{G}}$ dla $X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $X_{\mathcal{G}}, Y_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$ otrzymujemy

$$\nabla_X Y = \underbrace{\nabla_{X_{\mathcal{F}}} Y_{\mathcal{F}}}_{\in \Gamma(T\mathcal{F})} + \underbrace{\nabla_{X_{\mathcal{G}}} Y_{\mathcal{F}}}_{\in \Gamma(T\mathcal{F})} + \underbrace{\nabla_{X_{\mathcal{F}}} Y_{\mathcal{G}}}_{\in \Gamma(T\mathcal{G})} + \underbrace{\nabla_{X_{\mathcal{G}}} Y_{\mathcal{G}}}_{\in \Gamma(T\mathcal{G})}. \quad (3.1.9)$$

Gdy $Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$, mamy $Y_{\mathcal{G}} = 0$, co implikuje $\nabla_X Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{X}(M)$. Postępując analogicznie dla $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$ uzyskujemy łącznie, że ∇ spełnia własność (2) koneksji bilagranżowskich. Własność (3) dowodzimy bezpośrednim rachunkiem: zgodnie z definicją ∇ dla dowolnych $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$ mamy

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi_{\mathcal{G}}[X, Y] - \pi_{\mathcal{F}}[Y, X] = \pi_{\mathcal{G}}[X, Y] + \pi_{\mathcal{F}}[X, Y] = [X, Y]. \quad (3.1.10)$$

Własność (1) jest bezpośrednią konsekwencją równości (3.1.8) prawdziwej dla dowolnej koneksji afinicznej ∇ . Łącząc ją ze wzorem (c) uzyskujemy $(\nabla_X \omega)(Y, Z) = 0$ dla dowolnych $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Z \in \Gamma(T\mathcal{G})$. Dla $Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{F})$, dzięki wykazanej wcześniej własności

(2) koneksji bilagranżowskich oraz temu, że $T\mathcal{F}$ jest równa swojemu dopełnieniu skośnie-ortogonalnemu $T\mathcal{F}^\omega = \{v \in TM : \forall_w \in T\mathcal{F} \ \omega(v, w) = 0\}$ jako przestrzeń styczna do foliacji lagranżowskiej, otrzymujemy

$$(\nabla_X \omega)(Y, Z) = X \underbrace{\omega(Y, Z)}_{=0} - \omega(\underbrace{\nabla_X Y}_{\in \Gamma(T\mathcal{F})}, Z) - \omega(Y, \underbrace{\nabla_X Z}_{\in \Gamma(T\mathcal{F})}) = 0 \quad (3.1.11)$$

Analogiczny rachunek dla $Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{G})$ dowodzi wreszcie, że $\nabla_X \omega = 0$ dla $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Podobne obliczenia dla odwzorowania β prowadzą do $\nabla_Y \omega = 0$ dla wszystkich $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$, co łącznie daje szukaną równość $\nabla \omega = 0$. \square

Zauważmy, że zgodnie z wykazanim wyżej stwierdzeniem dla dowolnego liścia L foliacji \mathcal{F} działanie koneksji bilagranżowskiej ∇ na cofnięciu $\iota_L^* T\mathcal{G}$ wiązki $T\mathcal{G}$ wzdłuż zanurzenia $\iota_L : L \hookrightarrow M$ to dokładnie (sprężone rzutowaniem $\pi_{\mathcal{G}}$) działanie *koneksji Botta* $D^{\mathcal{F}}$ wzdłuż liścia [28]. Działanie to zostało szerzej opisane w Rozdziale 1.1.1.

Zauważmy również, że koneksja ∇ jest beztorsyjna [51, Proposition 3.1]. Jednym ze sposobów na wykazanie tego faktu jest zastosowanie własności (3) koneksji bilagranżowskich z Definicji 3.1 oraz prawdziwej dla wszystkich $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tożsamości

$$d\omega(X, Y, Z) = \omega(T(X, Y), Z) + \omega(T(Y, Z), X) + \omega(T(Z, X), Y), \quad (3.1.12)$$

wiążącej torsję T koneksji afinicznej ∇ z dowolną 2-formą ω spełniającą $\nabla \omega = 0$. Wybierając bowiem pola wektorowe $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Z \in \Gamma(T\mathcal{G})$, z równości $d\omega = 0$, $T(X, Z) = 0$ oraz $T(Y, Z) = 0$ otrzymujemy $\omega(T(X, Y), Z) = 0$. Ponieważ z własności (2) koneksji bilagranżowskich zachodzi $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ mamy również $\omega(T(X, Y), Z) = 0$ dla $Z \in \Gamma(T\mathcal{F})$ dzięki temu, że $T\mathcal{F}$ jest podwiązką lagranżowską. Z niezdegenerowania formy ω mamy więc $T(X, Y) = 0$ dla dowolnych $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Zamieniając rolami foliacje \mathcal{F} i \mathcal{G} otrzymujemy również $T(X, Y) = 0$ dla $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$, co w połączeniu z własnością (3) koneksji bilagranżowskich z liniowości prowadzi do znikania torsji ∇ .

Powyższa uwaga o znikaniu torsji, wraz z Definicją 3.1 oraz Stwierdzeniem 3.2, charakteryzują ∇ jako jedyną (beztorsyjną) koneksję symplektyczną [22] rozszerzającą obie koneksje Botta $D^{\mathcal{F}}, D^{\mathcal{G}}$ stowarzyszone z 2-tkaniną lagranżowską $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Jak wspomnieliśmy w Rozdziale 1.1.1, koneksje Botta są płaskie wzdłuż liści tkaniny \mathcal{W} . Ten sam fakt dotyczy również koneksji bilagranżowskich ∇ , co wynika wprost z poniższego lematu.

Lemat 3.3. Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie rozmaitością bilagranżowską wymiaru $2n$ oraz niech $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ będzie lokalnym układem współrzędnych na M spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$ dla $i, j = 1, \dots, n$. Wtedy

- (a) pola wektorowe $(X_{y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})_{i,j=1}^n$ tworzą reper równoległy względem koneksji ∇ wzdłuż każdego liścia foliacji \mathcal{F} ,
- (b) pola wektorowe $(\frac{\partial}{\partial x_i}, X_{x_j})_{i,j=1}^n$ tworzą reper równoległy względem koneksji ∇ wzdłuż każdego liścia foliacji \mathcal{G} ,

gdzie przez X_f oznaczamy pole hamiltonowskie funkcji gładkiej $f \in C^\infty(M)$ wyznaczone równością $\omega(X_f, \cdot) = df$.

Dowód. Rozpatrzmy bez utraty ogólności jedynie część (a) lematu. Ustalmy pole wektorowe $v \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Zauważmy, że $\nabla_v \frac{\partial}{\partial y_i} = 0$ ze wzoru (a) w Stwierdzeniu 3.2 dla każdego indeksu $i = 1, 2, \dots, n$. Następnie, wykorzystując własność (2) koneksji bilagranżowskich z Definicji 3.1 uzyskujemy $\nabla_v X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ dla dowolnego $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$, co sprawia, że dla każdej funkcji gładkiej $H \in C^\infty(M)$ spełniającej $dH|_{T\mathcal{F}} = 0$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} (\nabla_v dH)(X) &= v dH(X) - dH(\nabla_v X) \\ &= v dH(X_{\mathcal{G}}) - dH(\nabla_v X_{\mathcal{F}}) - dH(\pi_{\mathcal{G}}[v, X_{\mathcal{G}}]) \\ &= v dH(X_{\mathcal{G}}) - dH([v, X_{\mathcal{G}}]) = d(dH)(v, X_{\mathcal{G}}) + X_{\mathcal{G}}(vH) = 0, \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

gdzie $X \in \mathfrak{X}(M)$ zapisaliśmy jako $X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{G}}$ dla jednoznacznie wyznaczonych $X_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $X_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$. Zauważmy, że w tej sytuacji mamy również $\nabla_v X_H = 0$ ze wzoru (c) w Stwierdzeniu 3.2, gdyż

$$\nabla_v X_H = \alpha^{-1} \nabla_v (\alpha X_H) = \alpha^{-1} (\nabla_v dH) = 0. \tag{3.1.14}$$

Kładąc $H = y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ otrzymujemy tezę. □

Istnienie reperów równoległych względem ∇ wzdłuż liści foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} sprawia, że endomorfizm krzywizny Riemanna $R(X, Y)$ koneksji ∇ jest zerowy dla par pól wektorowych $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$. Fakt ten odzwierciedla się w postaci współrzędnościowej wyrażenia na krzywiznę koneksji ∇ wewnątrz układu współrzędnych $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ spełniającego $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$, którą podamy w poniższym stwierdzeniu. Jest ona znana i została obliczona między innymi w

[28, 51]. My wykorzystamy w tym celu metodę reperu ruchomego Cartana [13, 31] oraz pewien naturalny względem struktury 2-tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ rozkład operatora różniczkowego zewnętrznego na sumę $d = d_x + d_y$ dwóch operatorów częściowych d_x, d_y , których działanie na $(p+q)$ -formach $\eta \in \Omega^{p+q}(M)$ postaci $f(x, y) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_q}$ sprowadza się do zastosowania intuicyjnego wzoru

$$\begin{aligned} d_x \eta &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dx_i \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_q}, \\ d_y \eta &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) dy_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_q}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

we współrzędnych powyższej postaci. Operatory te można scharakteryzować jako jedyne różniczkowanie algebry z gradacją $\Omega^*(M)$ spełniające $d_x d_y + d_y d_x = 0$ oraz $d_x^2 = d_y^2 = 0$, których działania na funkcjach gładkich $f \in C^\infty(M)$ określone są wzorami $d_x f(v) = v_{\mathcal{F}} f$ oraz $d_y f(v) = v_{\mathcal{G}} f$ dla dowolnych $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}} \in TM$ w rozkładzie na $v_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}$ oraz $v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$ [26]. Wykorzystując je w poniższych obliczeniach uzyskamy wyjątkowo prostą postać macierzy 1-formy koneksji ∇ oraz 2-formy jej krzywizny.

Stwierdzenie 3.4 (patrz również [28, 51]). *Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie rozmaitością bilagranżowską wymiaru $2n$ wyposażoną w koneksję kanoniczną ∇ oraz niech $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ będzie układem współrzędnych spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$. Oznaczmy przez A macierz wymiaru $n \times n$ o współczynnikach $A_{ij} = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$. Macierz 1-formy koneksji ∇ względem reperu współrzędnościowego to*

$$\sigma = \begin{bmatrix} (d_x A \cdot A^{-1})^T & 0 \\ 0 & (A^{-1} \cdot d_y A) \end{bmatrix}, \quad (3.1.16)$$

podczas gdy macierz 2-formy jej krzywizny to

$$\Omega = \begin{bmatrix} d_y (d_x A \cdot A^{-1})^T & 0 \\ 0 & d_x (A^{-1} \cdot d_y A) \end{bmatrix}, \quad (3.1.17)$$

gdzie działanie operatorów d_x, d_y na macierzach określamy poprzez przyłożenie ich do wszystkich wyrazów macierzy z osobna.

Dowód. Elementy w blokach poza główną przekątną macierzy σ są zerowe, ponieważ ∇ zachowuje $T\mathcal{F}$ oraz $T\mathcal{G}$ dzięki własności (2) koneksji bilagranżowskich z Definicji 3.1. By odnaleźć pozostałe elementy, użyjmy Lematu 3.3 oraz Stwierdzenia 3.2 by zróżniczkować $\frac{\partial}{\partial x_i}$ oraz $\frac{\partial}{\partial y_j}$ wzdłuż $X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{G}} \in \mathfrak{X}(M)$ dla dowolnych $X_{\mathcal{F}} \in \Gamma(T\mathcal{F})$, $X_{\mathcal{G}} \in \Gamma(T\mathcal{G})$.

Działanie odwzorowań α na $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T\mathcal{F}$ oraz β na $w = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial y_j} \in T\mathcal{G}$ we współrzędnych to

$$\begin{aligned}\alpha(v) &= \omega(v, \cdot) = \sum_{i,j} v_i A_{ij} dy_j = \sum_i (A^T \cdot v)_i dy_i, \\ \beta(w) &= -\omega(\cdot, w) = \sum_{j,k} dx_j (-A_{jk}) w_k = \sum_j (-A \cdot w)_j dx_j,\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

gdzie po prawej stronie obu równości bierzemy współrzędne wyniku mnożenia macierzy A lub jej transpozycji przez odpowiedni wektor kolumnowy. Wzory te prowadzą do

$$\begin{aligned}\nabla_X \frac{\partial}{\partial x_i} &= \nabla_{X_{\mathcal{F}}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \nabla_{X_{\mathcal{G}}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{X_{\mathcal{F}}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha^{-1} \nabla_{X_{\mathcal{F}}} \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_j \alpha^{-1} \nabla_{X_{\mathcal{F}}} A_{ij} dy_j = \sum_j (\alpha^{-1} dy_j)(X_{\mathcal{F}} A_{ij}) \\ &= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} A_{jk}^{-1} \right) (X_{\mathcal{F}} A_{ij}) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (d_x A(X) \cdot A^{-1})_{ki}^T,\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

co dowodzi, że górny-lewy blok to dokładnie $(d_x A \cdot A^{-1})^T$. Podobnie uzyskujemy współczynniki w dolnym-prawym bloku.

Inną metodą na odzyskanie drugiego niezerowego bloku macierzy σ jest powołanie się na symetrię ról foliacji \mathcal{F} i \mathcal{G} w rozpatrywanym zagadnieniu. Zamieniając je rolami należy pamiętać o zastąpieniu zmiennych x_i zmiennymi y_j i vice versa, a także o wynikającej stąd zamianie ról operatorów d_x, d_y oraz zastąpieniu macierzy A macierzą $-A^T$ w zgodzie ze wzorem $A_{ij} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\omega\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -A_{ji}^T$ na jej współczynniki. W ten sposób dowodzimy, że drugi blok wynosi

$$(d_y A^T \cdot A^{-T})^T = A^{-1} \cdot d_y A\tag{3.1.20}$$

zgodnie z treścią tezy lematu.

Aby odzyskać 2-formy krzywizny, posłużymy się wzorem Cartana [31, Chapter 2, §5] postaci

$$\Omega_j^i = d\sigma_j^i + \sum_k \sigma_k^i \wedge \sigma_j^k \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, n.\tag{3.1.21}$$

Bezpośredni rachunek prowadzi do

$$\Omega = d\sigma + \sigma \wedge \sigma = \begin{bmatrix} \Omega_{\mathcal{F}} & 0 \\ 0 & \Omega_{\mathcal{G}} \end{bmatrix},\tag{3.1.22}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathcal{F}} &= d(A^{-T} \cdot d_x A^T) + (A^{-T} \cdot d_x A^T) \wedge (A^{-T} \cdot d_x A^T) \text{ oraz} \\ \Omega_{\mathcal{G}} &= d(A^{-1} \cdot d_y A) + (A^{-1} \cdot d_y A) \wedge (A^{-1} \cdot d_y A).\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
d_y(A^{-1} \cdot d_y A) &= d_y(A^{-1}) \wedge d_y A + A^{-1} \cdot \overbrace{d_y^2 A}^{=0} \\
&= (-A^{-1} \cdot d_y A \cdot A^{-1}) \wedge d_y A \\
&= -(A^{-1} \cdot d_y A) \wedge (A^{-1} \cdot d_y A).
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Wynika stąd, że $\Omega_{\mathcal{G}}$ redukuje się do $d_x(A^{-1} \cdot d_y A)$. Macierz $\Omega_{\mathcal{F}}$ oblicza się analogicznie. \square

Operatory d_x, d_y są kobrzegami pewnego kompleksu podwójnego $\Omega^{\bullet, \bullet}(M, \mathcal{W})$ dla danej tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Na przestrzenie $\Omega^{p,q}(M, \mathcal{W})$ składają się wszystkie $(p+q)$ -formy anihilujące każdy iloczyn zewnętrzny k wektorów stycznych do \mathcal{F} oraz l wektorów stycznych do \mathcal{G} , gdzie $k+l = p+q$, $k \neq p$ oraz $l \neq q$. Ponieważ $T\mathcal{F}, T\mathcal{G}$ są dystrybucjami inwolucyjnymi, różniczkowania d_x, d_y mają stopnie $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$ odpowiednio wewnątrz kompleksu $\Omega^{\bullet, \bullet}(M, \mathcal{W})$ [26]. Co więcej, prawdziwy jest następujący wariant lematu Poincarégo znanego z teorii kohomologii de Rhama [26, (15)]. Załóżmy, że M jest ściągalny wzdłuż $T\mathcal{G}$ do liścia L foliacji \mathcal{F} , tzn. niech istnieje gładka homotopia $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$ taka, że $H(0, x) = x$, $H(1, x) \in L$ oraz $dH|_{(t,x)}(\frac{\partial}{\partial t}) \in T\mathcal{G}$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$ oraz $x \in M$. Jeżeli $\alpha \in \Omega^{p+1,q}(M, \mathcal{W})$ spełnia $d_x \alpha = 0$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$, to istnieje $\beta \in \Omega^{p,q}(M, \mathcal{W})$ taka, że $\alpha = d_x \beta$. W przypadku, gdy $M = U \times V$, a foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} generowane są przez dystrybucje styczne TU, TV odpowiednio, jeżeli tylko $\alpha \in \Omega^{0,q}(M, \mathcal{W})$ spełnia $d_x \alpha = 0$, to $\alpha = \pi_V^* \beta$ dla pewnej formy $\beta \in \Omega^q(V)$, gdzie $\pi_V : U \times V \rightarrow V$ jest rzutowaniem na drugi czynnik. Z symetrii ról foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} zachodzi również analogiczne twierdzenie dla operatora d_y .

Te narzędzia umożliwiają nam zapisanie warunku płaskości struktury bilagranżowskiej w terminach macierzy A formy ω o współczynnikach $A_{ij} = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$ wewnątrz dowolnego układu współrzędnych $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ spełniającego $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$.

Lemat 3.5. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie 2-tkaniną kowymiaru n na \mathbb{R}^{2n} o foliacjach generowanych przez $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$ w standardowym układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, oraz niech $h : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie kielkiem odwzorowania macierzowego spełniającego*

$$d_x(h^{-1} \cdot d_y h) = 0. \tag{3.1.25}$$

Wtedy istnieją kielki funkcji gładkich o wartościach macierzowych $f, g : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow$

$M_{n \times n}(\mathbb{R})$ spełniające razem

$$h(x, y) = f(x) \cdot g(y). \quad (3.1.26)$$

Dowód. Z wariantu lematu Poincarégo opisanego w akapicie powyżej otrzymujemy, że $h^{-1} \cdot d_y h = B(y)$ dla pewnego kielka 1-formy B o wartościach macierzowych ze współczynnikami $B_{ij} \in \Omega^{0,1}(M, \mathcal{W})$.

Rozważmy układ równań różniczkowych $d_y g = g \cdot B(y)$ na \mathbb{R}^n , gdzie niewiadomą jest funkcja g o wartościach w macierzach wymiaru $n \times n$. Układ ten ma przynajmniej jedno rozwiązanie odwracalne, np. $h(0, y)$. Oznaczmy przez $g(y)$ jedno z nich. Równość $h^{-1} \cdot d_y h = g^{-1}(y) \cdot d_y g(y)$ pociąga za sobą

$$\begin{aligned} d_y(h \cdot g^{-1}(y)) &= d_y h \cdot g(y)^{-1} + h \cdot (-g(y)^{-1} d_y g(y) g(y)^{-1}) \\ &= d_y h \cdot g(y)^{-1} - (h \cdot h^{-1}) \cdot d_y h \cdot g(y)^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Wykorzystując znów powyższy wariant lematu Poincarégo odnajdujemy kieltek funkcji gładkiej $f(x)$ o wartościach macierzowych spełniający $h \cdot g(y)^{-1} = f(x)$, co po przemnożeniu obustronnym przez $g(y)$ okazuje się być równoważne (3.1.26). \square

Twierdzenie 3.6. *Przy oznaczeniach ze Stwierdzenia 3.4 koneksja bilagranżowska ∇ struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ jest płaska wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją kielki funkcji gładkich o wartościach macierzowych $f, g : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ spełniające razem*

$$A(x, y) = f(x) \cdot g(y). \quad (3.1.28)$$

Dowód. Załóżmy, że koneksja ∇ jest płaska. Wtedy ze wzoru (3.1.17) na 2-formy krzywizny koneksji ∇ zachodzi równość $d_x(A^{-1} \cdot d_y A) = 0$, a więc tezę otrzymujemy z zastosowania Lematu 3.5 do kielka funkcji $h(x, y) = A(x, y)$.

W przypadku, gdy zachodzi (3.1.28), bezpośredni rachunek we współrzędnych w oparciu o wzór (3.1.17) prowadzi do równości

$$\begin{aligned} d_x(g(y)^{-1} f(x)^{-1} \cdot d_y(f(x)g(y))) &= d_x(g(y)^{-1} f(x)^{-1} f(x) \cdot d_y g(y)) \\ &= d_x(g(y)^{-1} \cdot d_y g(y)) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

dotyczącej jednego z dwóch niezerowych bloków macierzy 2-form krzywizny Ω koneksji ∇ . To wraz z analogiczną równością $d_y(d_x A \cdot A^{-1})^T = 0$ dla drugiego bloku oznacza, że krzywizna Ω znika na całej rozmaności M . \square

Przykład 3.1. Obliczmy formę symplektyczną struktury bilagranżowskiej wskazanej przez Tabachnikova w [48, 6.]. Ustalmy sferę jednostkową $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ o środku w zerze oraz standardową formę symplektyczną na jej wiązce kostycznej będącej obcięciem formy standardowej $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ na $T^*\mathbb{R}^n$ do podrozmaitości

$$T^*S^{n-1} = \{(p, q) \in T^*\mathbb{R}^n : \sum_i q_i p_i = 0, \sum_i p_i^2 = 1\} \quad (3.1.30)$$

zgodnie z notacją obowiązującą w [6, Chapter 3, 1.5]. Pary $(p, q) \in T^*S^{n-1}$ są w bijekcji ze zorientowanymi prostymi afinicznymi przestrzeni \mathbb{R}^n : wektor znormalizowany p odpowiada za kierunek i orientację prostej, natomiast wektor dualny do q , który jest prostopadły do p względem zwykłego iloczynu skalarnego $\langle q, p \rangle = \sum_i q_i p_i$ na \mathbb{R}^n , określa punkt przecięcia prostej z hiperpłaszczyzną ortogonalną do p .

Wszystkie proste przecinające ustalony punkt $x \in \mathbb{R}^n$ stanowią podrozmaitość lagranżowską $L_x = \{(p, q) \in T^*S^{n-1} : q = x - \langle p, x \rangle p\}$ rozmaitości T^*S^{n-1} . Dzieje się tak, gdyż na rozmaitości L_x zachodzi

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i = -d\langle p, x \rangle \wedge \underbrace{(\sum_i p_i dp_i)}_{=d(\frac{1}{2}|p|^2)=0} - \langle p, x \rangle (\sum_i dp_i \wedge dp_i) = 0. \quad (3.1.31)$$

Oznacza to w szczególności, że dowolna hiperpowierzchnia $H \subseteq \mathbb{R}^n$ przecinająca transwersalnie ustaloną prostą $(p_0, q_0) \in T^*S^{n-1}$ w dokładnie jednym punkcie określa foliację lagranżowską \mathcal{F} otoczenia otwartego punktu $(p, q) \in T^*S^{n-1}$. Dwie takie rozłączne hiperpowierzchnie H, K definiują foliacje lagranżowskie \mathcal{F}, \mathcal{G} wchodzące w skład struktury bilagranżowskiej $(U, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ określonej na otoczeniu otwartym $U \subseteq T^*S^{n-1}$ punktu (p_0, q_0) , ponieważ dowolne dwa punkty $x \in H$ oraz $y \in K$ wyznaczają dokładnie jedną prostą $(p, q) \in T^*S^{n-1}$ zorientowaną od punktu y do x o parametrach

$$p = \frac{x - y}{|x - y|} \quad \text{oraz} \quad q = x - \langle x - y, x \rangle \frac{x - y}{|x - y|^2}. \quad (3.1.32)$$

Bezpośrednim rachunkiem wykazujemy, że wektor $v = \sum_i v_{x,i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j v_{y,j} \frac{\partial}{\partial y_j}$ spełnia $dp(v) = dq(v) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy leży on w dystrybucji stycznej generowanej przez pola wektorowe $(\sum_i (x_i - y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial y_j})$. Jeżeli więc prosta (p, q) jest transwersalna do obu powierzchni, dowolna nieosobliwa parametryzacja gładka $(t, s) \mapsto (x(s), y(t))$ punktów $x \in H, y \in K$ obu powierzchni przy pomocy parametrów $s, t \in \mathbb{R}^{n-1}$ zadaje układ współrzędnych, w którym foliacje lagranżowskie \mathcal{F}, \mathcal{G} spełniają $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker ds_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{n-1} \ker dt_j$. Można zatem zastosować uzyskane wyżej wyniki do

obliczenia krzywizny koneksji bilagranżowskiej zadanej struktury. Forma symplektyczna ω na T^*S^{n-1} zadaje się wzorem współrzędnościowym

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_i dq_i \wedge dp_i \\
&= \sum_i dx_i \wedge dp_i - d(\langle p, x \rangle) \wedge (\sum_i p_i dp_i) - \langle p, q \rangle (\sum_i dp_i \wedge dp_i) \\
&= \sum_i dx_i \wedge dp_i = \sum_i dx_i \wedge d\left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|}\right) \\
&= -(\sum_i \frac{1}{|x - y|} dx_i \wedge dy_i) - \sum_i dx_i \wedge \left((x_i - y_i) (\sum_j \frac{(x_j - y_j)}{|x - y|^3} (dx_j - dy_j)) \right) \\
&= \frac{1}{|x - y|^3} \left(\sum_i (x_i - y_i) dx_i \wedge \sum_j (x_j - y_j) dy_j \right) - \frac{1}{|x - y|} \sum_i dx_i \wedge dy_i.
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Wykorzystując w tym miejscu parametryzację możemy wyznaczyć macierz A o wyrazach $A_{ij} = \omega(\frac{\partial}{\partial s_i}, \frac{\partial}{\partial t_j})$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$, a następnie obliczyć odpowiadające jej 2-formy krzywizny koneksji ∇ z wykorzystaniem Stwierdzenia 3.4. Jeżeli zapiszemy macierz Jacobiego odwzorowań $x(s), y(t)$ jako $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t} \in M_{n \times (n-1)}(\mathbb{R})$, to traktując wektory $(x - y)$ jako wektory kolumnowe poszczególnych współrzędnych powyższą równość można zredukować do postaci macierzowej

$$A = \frac{1}{|x - y|^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^T (x - y) (x - y)^T \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{1}{|x - y|} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^T \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right). \tag{3.1.34}$$

Obliczenie macierzy odwrotnej do A jest zadaniem dość trudnym w pełnej ogólności. Z tego powodu dokonamy uproszczenia przyjmując $n = 2$ w naszych rozważaniach.

Dla $n = 2$ odwzorowania $x(s)$ oraz $y(t)$ są krzywymi gładkimi o pochodnych $x'(s), y'(t)$ odpowiednio, natomiast forma symplektyczna ω przyjmie postać $f(s, t) ds \wedge dt$ dla pewnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Z równania (3.1.34) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{|x - y|^3} \left(\langle x - y, x' \rangle \langle x - y, y' \rangle - \langle x - y, x - y \rangle \langle x', y' \rangle \right) ds \wedge dt \\
&= \frac{1}{|x - y|^3} \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{2} |x - y|^2 \right) \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |x - y|^2 \right) - |x - y|^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \frac{1}{2} |x - y|^2 \right) \right) ds \wedge dt \\
&= \left(\frac{1}{4|x - y|^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \log(|x - y|^2) \right) + \frac{1}{4|x - y|} \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} |x - y|^2 \right) \right) ds \wedge dt.
\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

Podwójna mieszana pochodna logarytmiczna powyższego wyrażenia jest szukanym współczynnikiem ξ tensora krzywizny koneksji ∇ . Obliczenia wykonane przy pomocy systemu algebry komputerowej prowadzą do następującego wzoru ogólnego w wymiarze $n = 2$

$$\begin{aligned}
\xi &= -\frac{6\langle x - y, x' \rangle \langle x - y, y' \rangle}{|x - y|^4} + \frac{3\langle x', y' \rangle}{|x - y|^2} + \frac{\det(x', y') \det(x'', x - y)}{\det(x', x - y)^2} \\
&\quad - \frac{\det(x'', y')}{\det(x', x - y)} - \frac{\det(y', x') \det(y'', x - y)}{\det(y', x - y)^2} + \frac{\det(y'', x')}{\det(y', x - y)},
\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

gdzie przez $\det(v, w)$ dla $v, w \in \mathbb{R}^2$ rozumiemy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej w wyniku konkatencji odpowiednich wektorów kolumnowych. Odnalezienie pary

krzywych $x(s), y(t)$, dla których powyższe wyrażenie ξ zeruje się całkowicie, stanowiłoby częściową odpowiedź na pytanie postawione przez Tabachnikova [48, 6.]: *jaki kształt mają powierzchnie H, K indukujące w powyższy sposób płaską koneksję bilagranżowską na podzbiornie otwartym T^*S^{n-1} ?* Wstępne eksperymenty w przypadku $n = 2$ zdają się sugerować, że takie hiperpowierzchnie nie mogą istnieć.

3.2 Podstruktury bilagranżowskie

Przez cały ten rozdział będziemy odnosić się do wstępnie ustalonej struktury bilagranżowskiej $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ wymiaru $2n$ wyposażonej w koneksję kanoniczną ∇ . Naszym obecnym celem będzie opisanie tych podrozmaitości $S \subseteq M$, które w sposób dobrze określony dziedziczą strukturę bilagranżowską ze struktury tła. W celu uproszczenia notacji posłużymy się symbolem obcięcia $E|_S$ wiązki E do S reprezentującym cofnięcie ι^*E danej wiązki wektorowej $E \hookrightarrow TM \twoheadrightarrow M$ wzdłuż zanurzenia $\iota : S \hookrightarrow M$.

Definicja 3.7. Podrozmaitość gładka $S \subseteq M$ jest *podrozmaitością bilagranżowską rozmaitości* $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ jeżeli dystrybucje styczne $T\mathcal{P} = T\mathcal{F}|_S \cap TS$ oraz $T\mathcal{Q} = T\mathcal{G}|_S \cap TS$ wewnątrz TS całkują się do nieosobliwych foliacji \mathcal{P}, \mathcal{Q} rozmaitości S oraz gdy czwórka $(S, \omega|_S, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ sama jest rozmaitością bilagranżowską.

Poniżej przedstawimy kilka elementarnych konsekwencji tej definicji. Stąd, że zgodnie z definicją struktury bilagranżowskiej forma $\omega|_S$ jest niezdegenerowana na S , wymiar rozmaitości S musi być parzysty. Jej wiązka styczna TS rozkłada się na sumę wiązek $T\mathcal{P} \oplus T\mathcal{Q}$. Wymiary tych wiązek wynoszą $\dim T\mathcal{P} = \dim T\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \dim S$, ponieważ foliacje \mathcal{P}, \mathcal{Q} są foliacjami lagranżowskimi.

Podrozmaitość $S \subseteq M$ o tej własności, że forma $\omega|_S$ jest niezdegenerowana, nazywa się *podrozmaitością symplektyczną* [36, Chapter 22]. Każda taka podrozmaitość S wyposaża $TM|_S$ w rozkład na sumę Whitneya $TM|_S = TS \oplus TS^\omega$ wiązki TS oraz jej dopełnienia skośnie-ortogonalnego TS^ω składającego się z wektorów stycznych $v \in TM$, dla których zachodzi $\omega(v, \cdot)|_{TS} = 0$. Mamy więc kanoniczne rzutowanie $p_S : TM|_S \twoheadrightarrow TS$ wzdłuż TS^ω , którego obraz $p_S v$ względem dowolnego ustalonego wektora $v \in TM|_S$ można określić jako jedyny wektor styczny S spełniający

$$\omega(v, w) = \omega(p_S v, w) \quad \text{dla wszystkich } w \in TS. \quad (3.2.1)$$

Zauważmy, że wektory styczne z $T\mathcal{F}|_S$ ($T\mathcal{G}|_S$) rzutują się na wektory z $T\mathcal{P}$ ($T\mathcal{Q}$), ponieważ $\omega(v, \cdot)$ znika na wszystkich wektorach z $T\mathcal{P}$ ($T\mathcal{Q}$), podczas gdy $T\mathcal{P}^\omega = T\mathcal{P}$ ($T\mathcal{Q}^\omega = T\mathcal{Q}$).

Wiązki $T\mathcal{P}$ oraz $T\mathcal{Q}$ łączą kanoniczne izomorfizmy $T\mathcal{P} \simeq T\mathcal{Q}^*$ oraz $T\mathcal{Q} \simeq T\mathcal{P}^*$ określone zgodnie ze wzorem (3.1.2) przez $v \mapsto (v \lrcorner \omega)|_{T\mathcal{P}}$ oraz $w \mapsto (w \lrcorner \omega)|_{T\mathcal{Q}}$. Oznaczmy je przez α_S , β_S odpowiednio. Nietrudno upewnić się, że zachodzi $(\alpha v)|_S = \alpha_S v$ oraz $(\beta w)|_S = \beta_S w$ dla każdego $v \in T\mathcal{P}$ oraz $w \in T\mathcal{Q}$.

Oznaczmy przez ∇^S koneksję bilagranżowską struktury $(S, \omega|_S, T\mathcal{P}, T\mathcal{Q})$. Związek pomiędzy ∇^S oraz ∇ okazuje się być podobnej natury, co związek koneksji Levi-Civity rozmaitości riemannowskiej oraz jej podrozmaitości. Podobieństwo to nie jest przypadkowe – istnieje bowiem ścisła odpowiedniość pomiędzy strukturami bilagranżowskimi oraz tzw. *strukturami parakählerowskimi* [20, 21]. Poniżej naszkicujemy jej najistotniejszy dla nas fragment.

Każda struktura bilagranżowska $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ wymiaru $2n$ dostarcza narzędzi potrzebnych do skonstruowania kanonicznej metryki g sygnatury (n, n) . Konstrukcja ta wykorzystuje naturalną *strukturę prawie produktową* J stowarzyszoną z 2-tkaniną $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Struktura prawie produktowa to inaczej endomorfizm wiązki stycznej $J : TM \rightarrow TM$ spełniający $J^2 = \text{id}_{TM}$. W naszym przypadku dany jest on wzorem $Jv = v_{\mathcal{F}} - v_{\mathcal{G}}$ dla każdego wektora $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}} \in TM$ oraz jego składowych $v_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}$ oraz $v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$ w rozkładzie na sumę prostą $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G}$. Struktura ta jest *całkowalna*, tzn. wokół każdego punktu istnieje reper współrzędnościowy będący bazą własną endomorfizmu J , co łatwo dostrzec w dowolnym układzie współrzędnych prostującym tkaninę \mathcal{W} . Metrykę g definiuje się wzorem

$$g(v, w) = \omega(Jv, w) \quad \text{dla } v, w \in TM. \quad (3.2.2)$$

Dla dowolnego $v \in TM$ oraz $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ lub $X \in \Gamma(T\mathcal{G})$ mamy

$$(\nabla_v J)X = \nabla_v(JX) - J(\nabla_v X) = \nabla_v(\pm X) \mp \nabla_v X = 0 \quad (3.2.3)$$

dzięki własności (2) koneksji bilagranżowskich z Definicji 3.1. Równość ta w połączeniu z $\nabla\omega = 0$ prowadzi natychmiast do $\nabla g = 0$ poprzez regułę Leibniza dla ∇ . Stąd, że ∇ jest beztorsyjna, koneksja ∇ pokrywa się z koneksją Levi-Civity rozmaitości pseudorie-mannowskiej (M, g) [42, Chapter 3, Theorem 11]. Na podstawie wszystkich dowiedzionych wyżej własności możemy orzec, że trójka (M, g, J) tworzy *rozmaitość parakählerowską* [16]: rozmaitość gładką M wyposażoną w *strukturę parazespoloną* J oraz *metrykę neutralną* g

wyposażoną w koneksję Levi-Civity ∇ spełniającą $\nabla J = 0$ oraz $g(Jv, Jw) = -g(v, w)$ dla wszystkich $v, w \in TM$.

Należy zaznaczyć, że rzutowanie $p_S : TM|_S \rightarrow TS$ na podrozmaitość bilagranżowską S określone wzorem (3.2.1) jest równe rzutowaniu ortogonalnemu wiązki TM na TS względem indukowanej metryki neutralnej g . Istotnie, dla każdego $v \in TM|_S$ oraz $w \in TS$ dzięki symetrii g zachodzi równość

$$g(v, w) = -\omega(v, Jw) = -\omega(p_S v, Jw) = g(p_S v, w). \quad (3.2.4)$$

Stąd, że ∇ jest koneksją Levi-Civity, podczas gdy p_S jest rzutowaniem ortogonalnym, klasyczna teoria geometrii riemannowskiej przetłumaczona na język struktur bilagranżowskich prowadzi do następującego wniosku.

Stwierdzenie 3.8. *Niech ∇ będzie koneksją kanoniczną rozmaitości bilagranżowskiej $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ oraz niech ∇_S będzie koneksją kanoniczną jednej z jej podrozmaitości bilagranżowskich S . Wtedy*

$$\nabla_v^S = p_S \circ \nabla_v. \quad (3.2.5)$$

dla wszystkich $v \in TS$.

Powyższa charakteryzacja ∇^S pozwala zaczerpnąć wiele przydatnych faktów dotyczących podrozmaitości bilagranżowskich ze świata pseudoriemannowskiego. Dla nas najważniejszym z nich będzie bilagranżowski analogon *równania Gaussa* wiążącego krzywiznę powierzchni z krzywizną przestrzeni tła [11, 32, 45].

Sformułowanie tego równania w języku podrozmaitości bilagranżowskich oparte jest na pojęciu *symplektycznego tensora krzywizny* [51]. Ten 4-tensor kowariantny Rs zadany jest wzorem

$$Rs(X, Y, Z, W) = \omega(R(Z, W)Y, Z). \quad (3.2.6)$$

dla każdej czwórki pól wektorowych $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, gdzie $R(Z, W)Y = \nabla_Z \nabla_W Y - \nabla_W \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, W]} Y$ to endomorfizm krzywizny Riemanna. Posiada on pewne symetrie: kilka zbliżonych swoją naturą do tych charakteryzujących klasyczny tensor Riemanna [51] oraz kilka innych symetrii ściśle związanych z rzutowaniami $\pi_{\mathcal{F}}(X) = X_{\mathcal{F}}$ oraz $\pi_{\mathcal{G}}(X) = X_{\mathcal{G}}$ dla wektorów $X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{G}}$, gdzie $X_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}$ and $X_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$ [28].

$$(a) \quad Rs(X, Y, Z, W) = -Rs(X, Y, W, Z), \quad (\text{antysymetria 2-form krzywizny})$$

$$(b) \quad Rs(X, Y, Z, W) + Rs(X, Z, W, Y) + Rs(X, W, Y, Z) = 0, \quad (\text{tożsamość Bianchiego})$$

$$(c) \quad Rs(X, Y, Z, W) = Rs(Y, X, Z, W), \quad (R(Z, W)\text{-niezmienniczość } \omega)$$

$$(d) \quad Rs(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z, W) = Rs(X_{\mathcal{G}}, Y_{\mathcal{G}}, Z, W) = 0, \quad (\text{płaskość wzdłuż } T\mathcal{F}, T\mathcal{G})$$

$$(e) \quad Rs(X, Y, Z_{\mathcal{F}}, W_{\mathcal{F}}) = Rs(X, Y, Z_{\mathcal{G}}, W_{\mathcal{G}}) = 0. \quad (\nabla \text{ paralelizuje } T\mathcal{F}, T\mathcal{G})$$

Tensor Riemanna Rm rozmaitości pseudoriemannowskiej (M, g) dla metryki neutralnej g indukowanej przez strukturę bilagranżowską $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ poprzez (3.2.2) związany jest z symplektycznym tensorem krzywizny Rs równaniem

$$Rs(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, JW), \quad (3.2.7)$$

gdzie J jest strukturą prawie produktową stowarzyszoną z tkaniną $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Powyższa relacja w połączeniu z klasycznym równaniem Gaussa pozwala wykazać bezpośrednio *bilagranżowskie równanie Gaussa* wiążące symplektyczny tensor krzywizny Rs^S podrozmaitości bilagranżowskiej S z symplektycznym tensorem krzywizny Rs przestrzeni tła. Jeżeli zadamy *drugą formę podstawową* koneksji ∇ klasycznym wzorem

$$II(v, w) = \nabla_v w - \nabla_v^S w, \quad v, w \in \Gamma(TS), \quad (3.2.8)$$

to równanie Gaussa redukuje się do

$$\begin{aligned} Rs(X, Y, Z, W) &= Rs^S(X, Y, Z, W) \\ &+ \omega(II(X, Z), II(Y, W)) - \omega(II(X, W), II(Y, Z)) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

dla wszystkich pól wektorowych $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$.

3.3 Geometryczny warunek płaskości struktur bilagranżowskich

Odpowiedniość pomiędzy rozmaitościami bilagranżowskimi oraz parakählerowskimi, w której pośredniczy metryka g opisana w akapicie otaczającym wzór (3.2.2), sugeruje, że całą informację o krzywiznie koneksji kanonicznej rozmaitości bilagranżowskiej $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ można wydobyć z krzywizn koneksji kanonicznych odpowiednich podrozmaitości bilagranżowskich wymiaru 2, lub krócej: *powierzchni bilagranżowskich*. W przypadku metrycznym odpowiada za to pojęcie *krzywizny sekcijnej*. Tutaj, w świecie bilagranżowskim, w celu odzyskania krzywizny struktury tła posłużymy się pewną klasą powierzchni bilagranżowskich rozpiętych lokalnie przez pary geodezyjnych koneksji kanonicznej ∇ stycznych

kolejno do $T\mathcal{F}$ oraz $T\mathcal{G}$. Kilka kolejnych akapitów poświęcimy szczegółowemu opisowi tych powierzchni. Ich rolę rozjaśni następujący po Definicji 3.9 Lemat 3.10.

Lokalnie, w dostatecznie małym otoczeniu ustalonego punktu $p \in M$, rozmaitość M przyjmuje postać iloczynu kartezjańskiego dwóch liści $F \in \mathcal{F}$ oraz $G \in \mathcal{G}$ przecinających się w p . Ponieważ zanurzenie $\iota_S : S \hookrightarrow M$ podrozmaitości bilagranżowskiej $(S, \omega|_S, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ przekształca liście foliacji \mathcal{P}, \mathcal{Q} w liście \mathcal{F}, \mathcal{G} odpowiednio, kiełek zanurzenia powierzchni bilagranżowskiej S musi lokalnie reprezentować się jako iloczyn dwóch krzywych $\gamma_F \times \gamma_G$, gdzie $\gamma_F : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow F \in \mathcal{F}$ oraz $\gamma_G : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow G \in \mathcal{G}$ spełniają $\omega(\dot{\gamma}_F, \dot{\gamma}_G) \neq 0$ oraz $\gamma_F(0) = \gamma_G(0) = p$.

Definicja 3.9. Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie strukturą bilagranżowską. Ustalmy $p \in M$ oraz weźmy liście F, G foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} odpowiednio przecinające punkt p . Mówimy, że dla danych dwóch funkcji gładkich $H, K \in C^\infty(M)$ powierzchnia bilagranżowska $S \subseteq M$ jest generowana przez hamiltoniany H, K w punkcie p jeżeli

$$(a) \quad dH|_{T\mathcal{F}} = 0, \quad dK|_{T\mathcal{G}} = 0,$$

$$(b) \quad \omega_p(X_H, X_K) \neq 0,$$

(c) liście S przecinające p są obrazami krzywych całkowych $\gamma_F : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow F$ oraz $\gamma_G : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow G$ pól hamiltonowskich $X_H, X_K \in \mathfrak{X}(M)$ funkcji H, K .

Obie krzywe γ_F, γ_G występujące w powyższej definicji rzeczywiście są geodezyjnymi koneksji bilagranżowskiej ∇ . Fakt ten, który wykażemy w trakcie poniższego dowodu przy pomocy równania (3.1.13), prowadzi niemal natychmiast do równości pomiędzy jedynym niezerowym współczynnikiem symplektycznego tensora krzywizny Rs_p^S koneksji ∇^S w punkcie $p \in S$ oraz jednym ze współczynników jego odpowiednika Rs_p wewnątrz przestrzeni tła określonego w (3.2.6).

Lemat 3.10. Niech S będzie powierzchnią bilagranżowską generowaną przez hamiltoniany H, K w punkcie $p \in M$ ustalonej rozmaitości bilagranżowskiej $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. Jeżeli γ_F, γ_G są krzywymi całkowymi pól hamiltonowskich X_H, X_K odpowiednio spełniającymi $\gamma_F(0) = \gamma_G(0) = p$, to

$$Rs_p(\dot{\gamma}_{G|0}, \dot{\gamma}_{F|0}, \dot{\gamma}_{F|0}, \dot{\gamma}_{G|0}) = Rs_p^S(\dot{\gamma}_{G|0}, \dot{\gamma}_{F|0}, \dot{\gamma}_{F|0}, \dot{\gamma}_{G|0}). \quad (3.3.1)$$

Dowód. Z faktu, że $T\mathcal{F}$ jest podwiązką lagranżowską wiązki stycznej TM , z równości $\omega(\dot{\gamma}_F, \cdot)|_{T\mathcal{F}} = dH|_{T\mathcal{F}} = 0$ uzyskujemy $\dot{\gamma}_F \in T\mathcal{F}^\omega = T\mathcal{F}$, co w połączeniu z $dH|_{T\mathcal{F}} = 0$

proceedzi poprzez (3.1.13) do równości $\nabla_{\dot{\gamma}_F} dH = 0$. Skorzystajmy teraz ze Stwierdzenia 3.2 by uzyskać $\nabla_{\dot{\gamma}_F} \dot{\gamma}_F = \nabla_{\dot{\gamma}_F} \alpha^{-1} dH = \alpha^{-1} \nabla_{\dot{\gamma}_F} dH = 0$. To natychmiast implikuje $II(\dot{\gamma}_F, \dot{\gamma}_F) = 0$ z definicji drugiej formy podstawowej II (3.2.8).

Pokażemy teraz, że $II(v, w) = 0$ dla wszystkich $v \in T_p \mathcal{P}, w \in T_p \mathcal{Q}$. Dzieje się tak, gdyż dowolny wektor $u \in TS$ rozkłada się na $u = u_{\mathcal{P}} + u_{\mathcal{Q}}$, gdzie $u_{\mathcal{P}} \in T\mathcal{P} \subseteq T\mathcal{F}|_S$ oraz $u_{\mathcal{Q}} \in T\mathcal{Q} \subseteq T\mathcal{G}|_S$, zatem prawdziwe są równości $\pi_{\mathcal{P}}(u) = \pi_{\mathcal{F}}(u)$ oraz $\pi_{\mathcal{Q}}(u) = \pi_{\mathcal{G}}(u)$ między odpowiednimi rzutami z jednoznaczności rozkładu wektora $u \in TM|_S$ w sumie Whitneya $TM|_S = T\mathcal{F}|_S \oplus T\mathcal{G}|_S$. Dzięki temu dla dowolnych $v \in \Gamma(T\mathcal{P})$ oraz $w \in \Gamma(T\mathcal{Q})$ zgodnie ze Stwierdzeniem (3.2) mamy

$$II(v, w) = \nabla_v w - \nabla_v^S w = \pi_{\mathcal{F}}[v, w] - \pi_{\mathcal{P}}[v, w] = 0. \quad (3.3.2)$$

Podstawiając teraz uzyskane wartości formy II w punkcie $p \in M$ do bilagranżowskiego równania Gaussa (3.2.9) otrzymujemy tezę. \square

Dowód poniższego Lematu 3.11 dostarcza geometrycznej konstrukcji powierzchni bilagranżowskich generowanych przez hamiltoniany.

Lemat 3.11. *Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie rozmaitością bilagranżowską wymiaru $2n$. Dla dowolnego punktu $p \in M$ oraz pary wektorów stycznych $v \in T_p \mathcal{F}, w \in T_p \mathcal{G}$ spełniających $\omega(v, w) \neq 0$ istnieje powierzchnia bilagranżowska $S \subseteq M$ generowana przez hamiltoniany H, K w punkcie p taka, że krzywe całkowite γ_H, γ_K pól hamiltonowskich $X_H, X_K \in \mathfrak{X}(M)$ funkcji H, K przecinające punkt p są dokładnie geodezyjnymi koneksji bilagranżowskiej ∇ struktury $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ spełniającymi $\dot{\gamma}_H(0) = v$ oraz $\dot{\gamma}_K(0) = w$.*

Dowód. Weźmy dostatecznie małe otoczenie $U \subseteq M$ punktu p i oznaczmy przez F, G liście foliacji $\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U$ przecinające punkt p . Niech $\eta = \omega(v, \cdot), \xi = \omega(\cdot, w) \in T_p^* M$. Wybierzmy funkcję gładką $\tilde{H} \in C^\infty(G)$ określoną na liściu G taką, że $\eta|_{TG} = d\tilde{H}|_p$, a następnie rozszerzmy ją do funkcji $H \in C^\infty(U)$ która jest stała na liściach foliacji $\mathcal{F}|_U$. Zauważmy, że dla skonstruowanej w ten sposób funkcji H mamy z jednej strony $dH|_{TG} = d\tilde{H}|_p = \eta|_{TG}$, a także $dH|_{TF} = 0 = \eta|_{TF}$ z definicji H oraz stąd, że $\eta = \omega(v, \cdot)$ dla $v \in TF = TF^\omega$.

Podsumowując, powyższa konstrukcja gwarantuje, że funkcja H spełnia $dH|_{TF} = 0$ oraz $dH|_p = \eta$. Skonstruujmy w podobny sposób funkcję $K \in C^\infty(M)$ o własnościach $dK|_{TG} = 0$ oraz $\xi = dK|_p$. Odpowiadające im pola hamiltonowskie spełniają

$$\begin{aligned} \omega(X_{H|_p}, \cdot) &= dH|_p = \eta = \omega(v, \cdot), & \text{a więc} & \quad X_{H|_p} = v, \\ \omega(\cdot, X_{K|_p}) &= dK|_p = \xi = \omega(\cdot, w), & \text{a więc} & \quad X_{K|_p} = w, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

oraz, dla dowolnych $Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Z \in \Gamma(T\mathcal{G})$,

$$\begin{aligned}\omega(X_H, Y) &= dH(Y) = 0, & \text{czyli} & \quad X_H \in \Gamma(T\mathcal{F}^\omega) = \Gamma(T\mathcal{F}) \\ \omega(Z, X_K) &= dK(Z) = 0, & \text{czyli} & \quad X_K \in \Gamma(T\mathcal{G}^\omega) = \Gamma(T\mathcal{G})\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Rozważmy pola wektorowe $X_{H|F}, X_{K|G}$ wzdłuż liści F, G foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} przecinających punkt p odpowiednio, zdefiniowane jako złożenia $X_{H|F} = X_H \circ \iota_F$ oraz $X_{K|G} = X_K \circ \iota_G$ odpowiednich pól hamiltonowskich z zanurzeniami $\iota_F : F \hookrightarrow U$ oraz $\iota_G : G \hookrightarrow U$. Przypomnijmy, że z Lematu 3.3 koneksja bilagranżowska ∇ jest płaska na liściach 2-tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Stąd pola wektorowe $X_{H|F}$ oraz $X_{K|G}$ rozszerzają się do gładkich pól wektorowych Y, Z określonych w otwartym otoczeniu punktu p spełniających $\nabla_w Y = 0$ oraz $\nabla_v Z = 0$ dla dowolnych $v \in T\mathcal{F}$ oraz $w \in T\mathcal{G}$ za pomocą gładko parametryzowanych przesunięć równoległych pojedynczych wektorów stycznych $X_{H|q}$ oraz $X_{K|q'}$ wzdłuż liści foliacji \mathcal{G}, \mathcal{F} przecinających poszczególne punkty $q \in F, q' \in G$ odpowiednio. Ze względu na płaskość koneksji ∇ wzdłuż liści 2-tkaniny \mathcal{W} , przesunięcia równoległe wektorów stycznych wzdłuż liści \mathcal{W} lokalnie nie zależą od wyboru krzywej zawartej w całości w pojedynczym liściu tkaniny, a więc rozszerzenia te są lokalnie dobrze określone [13, §4-1].

Ponieważ $\nabla_V \Gamma(T\mathcal{F}) \subseteq \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $\nabla_V \Gamma(T\mathcal{G}) \subseteq \Gamma(T\mathcal{G})$ dla każdego $V \in \mathfrak{X}(M)$ dzięki własności (2) koneksji bilagranżowskich z Definicji (3.1), mamy $Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Z \in \Gamma(T\mathcal{G})$. Stąd otrzymujemy

$$[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = 0 - 0 = 0,\tag{3.3.5}$$

co dowodzi inwolutywności dystrybucji $\mathcal{D} = \langle Y, Z \rangle \subseteq TM$ generowanych przez pola Y, Z . Stosując do \mathcal{D} twierdzenie Frobeniusa o całkowalności inwolutywnych dystrybucji stycznych stałego rzędu [36, Chapter 19] uzyskujemy foliację \mathcal{H} zbioru U powierzchniami, których przestrzenie styczne rozpięte są przez pola Y, Z . Niech $S \in \mathcal{H}$ będzie liściem \mathcal{H} przecinającym p . Stąd, że $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}|_S \cap TS)$ oraz $Y|_{F \cap S} = X_H$, otrzymujemy, że krzywa $F \cap S$ jest krzywą całkową pola hamiltonowskiego X_H . Postępując analogicznie otrzymujemy, że liść $G \cap S$ jest krzywą całkową pola X_K . Ponieważ $\omega(X_H, X_K) = \omega(v, w) \neq 0$ oraz $dH|_{T\mathcal{F}} = 0, dK|_{T\mathcal{G}} = 0$, powierzchnia S jest powierzchnią bilagranżowską generowaną przez hamiltoniany H, K w punkcie p . \square

W tym miejscu zwróćmy uwagę, że forma symplektyczna $\omega|_S$ na powierzchni bilagranżowskiej $S \subseteq M$ rozmaitości $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ jest *formą objętości*. Co więcej, koneksja

kanoniczna ∇^S powierzchni S zachowuje formę objętości $\omega|_S$, paralelizuje foliacje \mathcal{P}, \mathcal{Q} struktury bilagranżowskiej $(S, \omega|_S, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ oraz jest beztorsyjna, co wykazaliśmy w uwadze następującej zaraz po Stwierdzeniu 3.2. Z tezy o jednoznaczności koneksji kanonicznej pary $(\mathcal{W}, \omega|_S)$ dla 2-tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kowymiaru 1 określonej na rozmaitości S wyposażonej w formę objętości $\omega|_S$ (Twierdzenie 2.9) wynika, że ∇^S to dokładnie koneksja kanoniczna pary $(\mathcal{W}, \omega|_S)$. Ta zmiana perspektywy z czysto symplektycznej na unimodularną otwiera nam możliwość interpretacji krzywizny koneksji ∇^S (a więc również koneksji kanonicznej ∇ struktury tła, gdy S jest generowana przez hamiltoniany) w terminach niezmienników geometrycznych tkanin w wprowadzonych w Rozdziale 2. W szczególności, odpowiedź na postawione we wstępie pytanie o istnienie podobnych niezmienników w kontekście 2-tkanin lagranżowskich znajduje się w zasięgu skonstruowanych tam narzędzi, co potwierdza główne twierdzenie tej części pracy.

Twierdzenie 3.12. *Niech $(M, \omega, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie rozmaitością bilagranżowską wymiaru $2n$, oraz niech ∇ będzie jej koneksją kanoniczną. Następujące warunki są równoważne*

- (a) *Istnieje pokrycie otwarte rozmaitości M złożone z dziedzin układów współrzędnych $(x_i, y_j)_{i,j=1}^n$ spełniających $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$, $T\mathcal{G} = \bigcap_{i=1}^n \ker dx_i$, w których forma symplektyczna przyjmuje postać*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i. \quad (3.3.6)$$

- (b) *∇ jest płaska.*
- (c) *Dla każdej powierzchni bilagranżowskiej S generowanej przez hamiltoniany stowarzyszona z nią koneksja bilagranżowska ∇^S jest płaska.*
- (d) *Dla dowolnego punktu $p \in M$, każda powierzchnia bilagranżowska S generowana przez hamiltoniany w punkcie p spełnia jeden z geometrycznych warunków trywialności Twierdzenia 2.36.*

Dowód. Równoważność warunków (a) oraz (b) jest znana [21, 51]. Można ją ustanowić posługując się równoważnością między płaskością (beztorsyjnością) koneksji ∇ a istnieniem (przemiennością) reperów ∇ -równoległych [36, Chapter 9]. Zaproponujemy tutaj alternatywny dowód. Implikacja z (a) do (b) sprowadza się do bezpośredniego rachunku w oparciu o wzór (3.1.17) we współrzędnych. By wykazać implikację przeciwną, posłużymy się następującym argumentem.

Wyberzmy punkt $p \in M$ oraz układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ o środku w p spełniający $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^n \ker dx_j$. Załóżmy, że ∇ jest płaska. W tym wypadku Twierdzenie 3.6 orzeka, że istnieją dwa kielki funkcji $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$ o wartościach macierzowych takie, że $A(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, gdzie macierz A ma współczynniki $A_{ij} = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$. Stąd, że forma symplektyczna

$$\omega = \sum_{i,j} A_{ij}(x, y) dx_i \wedge dy_j = \sum_j (\sum_i f_{ik}(x) dx_i) \wedge (\sum_j g_{kj}(y) dy_j) \quad (3.3.7)$$

przestrzeni tła jest zamknięta, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 = d\omega &= \sum_j d(\sum_i f_{ik}(x) dx_i) \wedge (\sum_j g_{kj}(y) dy_j) \\ &+ \sum_j (\sum_i f_{ik}(x) dx_i) \wedge d(\sum_j g_{kj}(y) dy_j). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Ponieważ oba składniki różnią się liczbą czynników anihilujących $T\mathcal{F}$, są one liniowo niezależne, a więc zerują się za sprawą powyższej równości. Z odwracalności macierzy A (wynikającej z niezdegenerowania formy ω) odwracalne są również macierze $f(x)$ oraz $g(y)$. Musi zatem zachodzić

$$d(\sum_i f_{ik}(x) dx_i) = d(\sum_j g_{kj}(y) dy_j) = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3.9)$$

Stosując lemat Poincarégo [33, 7.10] odnajdźmy teraz kielki funkcji gładkich H_k, K_k spełniających $dH_k = \sum_i f_{ik}(x) dx_i$ oraz $dK_k = \sum_j g_{kj}(y) dy_j$ unormowanych tak, by $H_k(0) = K_k(0) = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Z ich pomocą forma symplektyczna zapisuje się jako

$$\omega = \sum_k dH_k \wedge dK_k. \quad (3.3.10)$$

Ponieważ z niezdegenerowania formy ω mamy $\omega^n \neq 0$, powyższa równość dowodzi liniowej niezależności 1-form $dH_1, \dots, dH_n, dK_1, \dots, dK_n$. Biorąc pod uwagę ich definicje jasne jest również, że funkcje H_k są funkcjami jedynie zmiennych x_1, \dots, x_n , podczas gdy funkcje K_k są funkcjami zmiennych y_1, \dots, y_n dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, n$. Kielków w zerze odwzorowania

$$\varphi(x, y) = (H_1(x), \dots, H_n(x), K_1(y), \dots, K_n(y)) \quad (3.3.11)$$

jest zatem kielkiem dyfeomorfizmu zachowującego foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} spełniającego $\varphi^*(\omega) = \sum_k dx_k \wedge dy_k$. Ta zamiana układu współrzędnych dowodzi istnienia jednego z elementów pokrycia zbioru M , o którym mowa w sformułowaniu warunku (a). Fakt, że taki układ współrzędnych istnieje wokół każdego punktu $p \in M$, wieńczy dowód implikacji z (b) do (a).

Aby wyprowadzić warunek (c) z (b), ustalmy dwa hamiltoniany H, K generujące powierzchnię bilagranżowską S w punkcie p oraz układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ o środku w $p \in M$, w którym zachodzi $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n \ker dy_i$, $T\mathcal{G} = \bigcap_{i=1}^n \ker dx_i$. Niech $\gamma_H(s) = (\tilde{x}(s), 0)$ oraz $\gamma_K(t) = (0, \tilde{y}(t))$ będą krzywymi całkowymi pól hamiltonowskich X_H, X_K przecinającymi punkt p w czasie 0 oraz niech $\varphi(s, t) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(t))$. Odwzorowanie φ jest lokalną parametryzacją powierzchni S . Twierdzenie 3.6 pozwala nam zapisać macierz A o współczynnikach $A_{ij} = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$ jako iloczyn $A(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ dla pary kielków funkcji $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ o wartościach macierzowych. Pola wektorowe X_H, X_K przyjmują wtedy postać

$$\begin{aligned} X_H &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial H}{\partial y_i}(y) g_{ij}^{-1}(y) f_{jk}^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ X_K &= -\sum_{i,j,k} \frac{\partial K}{\partial x_i}(x) f_{ij}^{-1}(x) g_{jk}^{-1}(y) \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ze względu na postać odwzorowania φ współrzędne pól wektorowych $d\varphi(\frac{\partial}{\partial s})$ ($d\varphi(\frac{\partial}{\partial t})$) w reperze współrzędnościowym nie zależą od zmiennych y_k (x_k) dla $k = 1, 2, \dots, n$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} dx_k(d\varphi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(s,t)}) &= dx_k(d\varphi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(s,0)}) = dx_k((X_H)|_{(\tilde{x}(s),0)}) \\ dy_k(d\varphi(\frac{\partial}{\partial t})|_{(s,t)}) &= dy_k(d\varphi(\frac{\partial}{\partial t})|_{(0,t)}) = dy_k((X_K)|_{(0,\tilde{y}(t))}) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$, a więc

$$\begin{aligned} d\varphi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(s,t)} &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial H}{\partial y_i}(0) g_{ij}^{-1}(0) f_{jk}^{-1}(\tilde{x}(s)) \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ d\varphi(\frac{\partial}{\partial t})|_{(s,t)} &= -\sum_{i,j,k} \frac{\partial K}{\partial x_i}(0) f_{ij}^{-1}(0) g_{jk}^{-1}(\tilde{y}(t)) \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Dokonując kontrakcji tych pól wektorowych z formą symplektyczną

$$\omega = \sum_j (\sum_i f_{ik}(x) dx_i) \wedge (\sum_j g_{kj}(y) dy_j) \quad (3.3.15)$$

otrzymujemy, że forma

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega|_{(s,t)}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}) &= \omega|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(t))}(d\varphi(\frac{\partial}{\partial s}), d\varphi(\frac{\partial}{\partial t})) \\ &= -\sum_{i,j,k,l,m,u,v} (\frac{\partial H}{\partial y_i}(0) g_{ij}^{-1}(0) f_{jk}^{-1}(\tilde{x}(s)) \cdot (f_{kl}(\tilde{x}(s)) g_{lm}(\tilde{y}(t))) \\ &\quad \cdot (g_{mu}^{-1}(\tilde{y}(t)) f_{uv}^{-1}(0) \frac{\partial K}{\partial x_v}(0)) \\ &= \omega|_{(0,0)}(X_H, X_K) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

przyjmuje we współrzędnych (s, t) spełniających $T\mathcal{P} = dt$ oraz $T\mathcal{Q} = ds$ postać $\omega|_S = c \cdot ds \wedge dt$ dla stałej $c = \omega|_{(0,0)}(X_H, X_K) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. To oznacza, że dla struktury bilagranżowskiej $(S, \omega|_S, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ indukowanej na S ze struktury tła 2-tkanina $\mathcal{W}_S = (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$

określona na rozmaitości S wyposażonej w formę objętości $\omega|_S$ jest unimodularnie trywialna. W tym wypadku Wniosek 2.15 orzeka, że koneksja kanoniczna pary $(\mathcal{W}_S, \omega|_S)$ jest płaska. Ponieważ koneksja ta jest koneksją bilagranżowską powierzchni S , warunek (c) jest spełniony.

Dowód (d) przy założeniu (c) sprowadza się do zastosowania Twierdzenia 2.36 do 2-tkaniny $\mathcal{W}_S = (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ rozpatrywanej powierzchni bilagranżowskiej S .

Ostatnia implikacja z warunku (d) do (b) wynika z równości wiążącej symplektyczne tensory krzywizny koneksji kanonicznej ∇^S powierzchni bilagranżowskiej S generowanej przez hamiltoniany oraz koneksji bilagranżowskiej ∇ struktury tła w ustalonym punkcie $p \in M$ (Lemat 3.10). Weźmy dwa wektory styczne $v \in T_p\mathcal{F}$ oraz $w \in T_p\mathcal{G}$ takie, że $\omega_p(v, w) \neq 0$, a następnie skorzystajmy z Lematu 3.11 by odnaleźć powierzchnię bilagranżowską S generowaną przez pewne hamiltoniany, której przestrzeń styczna w punkcie p rozpięta jest przez wektory v, w . Ponieważ holonomia unimodularna 2-tkaniny $\mathcal{W}_S = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określonej na $(S, \omega|_S)$ znika w punkcie p , krzywizna koneksji kanonicznej ∇^S również znika w p , co dowodzimy za pomocą Lematu (2.35) w sposób identyczny jak w dowodzie implikacji z warunku ((5)) do ((6)) w Twierdzeniu 2.36. To prowadzi do $Rs_p(w, v, v, w) = 0$ na podstawie Lematu 3.10, co działa niezależnie od wyboru wektorów stycznych $v \in T_p\mathcal{P}, w \in T_p\mathcal{Q}$ spełniających łącznie $\omega_p(v, w) \neq 0$. By uzyskać ten sam wynik dla wszystkich $v, w \in T_pM$, wykorzystamy symetrie (a) – (e) symplektycznego tensora krzywizny wypisane zaraz po sformułowaniu Stwierdzenia 3.8. Zapisując $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}}$ oraz $w = w_{\mathcal{F}} + w_{\mathcal{G}}$ dla jednoznacznie wyznaczonych $v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{F}} \in T_p\mathcal{F}$ oraz $v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{G}} \in T_p\mathcal{G}$ uzyskujemy

$$\begin{aligned}
Rs(v, w, w, v) &= Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{F}}, w, v) + Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w, v) \\
&\quad + Rs(v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, w, v) + Rs(v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{G}}, w, v) \\
&\stackrel{(d)}{=} Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w, v) + Rs(v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, w, v) \\
&\stackrel{(a,c)}{=} Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w, v) - Rs(w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, v, w) \\
&\stackrel{(e)}{=} Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}) + Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}) \\
&\quad - Rs(w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}) - Rs(w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}) \\
&= Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}) - Rs(w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}).
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Drugi składnik przekształca się w następujący sposób.

$$\begin{aligned}
Rs(w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}) &\stackrel{(c)}{=} Rs(v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}) \\
&\stackrel{(b)}{=} -Rs(v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}) - Rs(v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{F}}) \\
&\stackrel{(d)}{=} -Rs(v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}) \stackrel{(c)}{=} -Rs(v_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}) \\
&\stackrel{(b)}{=} Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}) + Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{G}}) \\
&\stackrel{(d)}{=} Rs(v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}}, w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}).
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Podstawiając uzyskane wyżej wyrażenie na $Rs(w_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{F}}, w_{\mathcal{G}})$ do ostatniego członu równości (3.3.17) otrzymujemy ostatecznie $Rs(v, w, w, v) = 0$, co działa dla dowolnej pary wektorów stycznych $v, w \in T_pM$. Fakt ten, przetłumaczony na język pseudoriemannowski przy pomocy odpowiedniości między rozmaitościami bilagranżowskimi a rozmaitościami parakählerowskimi, w której pośredniczy metryka neutralna g zdefiniowana w akapicie otaczającym równość (3.2.2), brzmi: krzywizna sekcyjna

$$K(v, w) = \frac{Rm(v, w, w, v)}{\|v\|_g^2 \|w\|_g^2 - g(v, w)^2} \tag{3.3.19}$$

przestrzeni (M, g) znika w punkcie p dla każdej pary wektorów $v, w \in T_pM$, dla których powyższe wyrażenie ma sens. Z klasycznej teorii [42, Chapter 3] wynika, że tensor Riemanna Rm znika w punkcie p . Ze wzoru (3.2.7) wnioskujemy, że również symplektyczny tensor krzywizny Rs znika w punkcie p . Ponieważ punkt p był dowolny, dowiedliśmy w ten sposób tezę twierdzenia. \square

Rozdział 4

Tkaniny symplektyczne

W tym rozdziale nasza uwaga skupi się na kielkach 2-tkanin symplektycznych $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ określonych na rozmaitości symplektycznej (M, ω) wymiaru $4n$ dla pewnej liczby naturalnej n . Przez *tkaniny symplektyczne* będziemy rozumieć tu tkaniny złożone z foliacji, których wszystkie liście S są podrozmaitościami symplektycznymi rozmaitości (M, ω) , tzn. wtedy, gdy 2-forma $\omega|_S$ jest niezdegenerowana na TS . Szczególne znaczenie będzie miał dla nas przypadek tkanin o foliacjach \mathcal{F}, \mathcal{G} tego samego wymiaru (równego $2n$). Okazuje się, że dla wielu takich tkanin istnieje jednoznacznie wyznaczona koneksja przekształcająca się w sposób niezmienniczy względem symplektomorfizmów zachowujących obie foliacje, która dostarcza znacznej ilości niezmienników krzywiznowych tkanin symplektycznych blisko związanych ze skonstruowanymi w [17] liczbami charakterystycznymi kielków osobliwości immersji podrozmaitości symplektycznej wymiaru połówkowego. Przystąpimy teraz do opisu tej koneksji.

4.1 Koneksja niezmiennicza 2-tkaniny symplektycznej kowymiaru $(2n, 2n)$

Ustalmy notację dotyczącą foliacji tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Podobnie jak w Rozdziale 3 określimy rzutowania

$$\pi_{\mathcal{F}} : TM \rightarrow T\mathcal{F}; v \mapsto v_{\mathcal{F}}, \quad \pi_{\mathcal{G}} : TM \rightarrow T\mathcal{G}; v \mapsto v_{\mathcal{G}}, \quad (4.1.1)$$

gdzie $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}}$ dla wektorów $v_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}$, $v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$. Ponadto, w związku z tym, że obie foliacje są foliacjami symplektycznymi względem formy ω , wiązka styczna TM rozkłada

się na sumę Whitneya na dwa różne sposoby: $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^\omega$ oraz $T\mathcal{G} = T\mathcal{G} \oplus T\mathcal{G}^\omega$, gdzie dla wiązki $E \subseteq TM$ symbolem E^ω oznaczamy dopełnienie skośnie ortogonalne wiązki E względem formy ω

$$E^\omega = \{v \in TM : \forall_{w \in E} \omega(v, w) = 0\}. \quad (4.1.2)$$

Rzutowania wektorów stycznych na $T\mathcal{F}$, $T\mathcal{G}$ wzdłuż ich dopełnień skośnie ortogonalnych obcinają się do odwzorowań

$$\begin{aligned} \alpha : T\mathcal{G} &\rightarrow T\mathcal{F}; & \alpha|_p(v) &= v_{\mathcal{F}}, & v &= v_{\mathcal{F}} + v'_{\mathcal{F}} \in T_p\mathcal{F} \oplus T_p\mathcal{F}^\omega \\ \beta : T\mathcal{F} &\rightarrow T\mathcal{G}; & \beta|_p(v) &= v_{\mathcal{G}}, & v &= v_{\mathcal{G}} + v'_{\mathcal{G}} \in T_p\mathcal{G} \oplus T_p\mathcal{G}^\omega, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

które dla generycznych położeń $T\mathcal{F}$ i $T\mathcal{G}$ względem formy ω są izomorfizmami wiązek.

Definicja 4.1. Tkanina symplektyczna $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ na rozmaitości symplektycznej (M, ω) wymiaru $4n$ o foliacjach \mathcal{F}, \mathcal{G} wymiaru $2n$ znajduje się w położeniu ogólnym względem formy ω , gdy odwzorowania α oraz β zdefiniowane wzorem (4.1.3) są odwracalne.

Powyższy warunek generyczności 2-tkanin symplektycznych jest konieczny, by zachodziło następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.2. Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie 2-tkaniną symplektyczną na (M, ω) kowymiaru $(2n, 2n)$ znajdującą się w położeniu ogólnym względem formy ω . Wtedy istnieje dokładnie jedna koneksja afiniczna ∇ spełniająca warunki (a) – (e) dane poniżej dla wszystkich $v \in TM$, $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$.

- (a) $\nabla_v X \in T\mathcal{F}$,
- (b) $\nabla_v Y \in T\mathcal{G}$,
- (c) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
- (d) $\nabla_Y \circ \alpha = \alpha \circ \nabla_Y$,
- (e) $\nabla_X \circ \beta = \beta \circ \nabla_X$.

Dowód. Najpierw wyznaczmy postać koneksji ∇ przy założeniu, że spełnia ona warunki (a) – (e). Stosując rzutowania α, β określone (4.1.1) do warunku (c), własności (a), (b) natychmiast implikują dla $X \in \Gamma(T\mathcal{F}), Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$

$$\nabla_X Y = \pi_{\mathcal{G}}[X, Y], \quad \nabla_Y X = \pi_{\mathcal{F}}[Y, X]. \quad (4.1.4)$$

Ponieważ α i β są odwracalne, własności (d), (e) determinują działanie ∇ w pozostałych przypadkach. Wyraża się ono wzorem

$$\nabla_X Z = (\beta^{-1} \circ \nabla_Y \circ \beta)(Z), \quad \nabla_Y W = (\alpha^{-1} \circ \nabla_X \circ \alpha)(W), \quad (4.1.5)$$

prawdziwym dla $X, Z \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y, W \in \Gamma(T\mathcal{G})$, wykorzystującym postać (4.1.4) działania ∇ dla argumentów stycznych do różnych foliacji. To dowodzi, że koneksja ∇ jest wyznaczona jednoznacznie.

By dowieść, że taka koneksja istnieje, zauważmy najpierw, że wzory (4.1.4), (4.1.5) definiują dobrze określoną koneksję afiniczną ∇ . Z tych wzorów natychmiast wynikają własności (a) oraz (b), w towarzystwie których ze wzoru (4.1.4) otrzymujemy dla dowolnych $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi_{\mathcal{G}}[X, Y] - \pi_{\mathcal{F}}[Y, X] = \pi_{\mathcal{G}}[X, Y] + \pi_{\mathcal{F}}[X, Y] = [X, Y], \quad (4.1.6)$$

co dowodzi własności (c). Własności (d) oraz (e) są wprost równoważne równości (4.1.5), co dowodzi istnienia koneksji z tezy twierdzenia. \square

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (4.1.4) otrzymujemy, że koneksja ∇ opisana w Stwierdzeniu 4.2 jest kolejną koneksją, która (tak jak w przypadku 2-tkanin lagranżowskich) rozszerza koneksje Botta $D^{\mathcal{F}}, D^{\mathcal{G}}$ stowarzyszone z obiema foliacjami. Obie koneksje Botta zostały krótko przedstawione w Rozdziale 1.1.1. Ich najważniejszą cechą z punktu widzenia tego fragmentu pracy będzie ich płaskość wzdłuż liści S odpowiadających im foliacji. Świadczy o tym fakt, że istnieją lokalne repery wiązki $T\mathcal{G}$ ($T\mathcal{F}$) równoległe względem koneksji Botta $D^{\mathcal{F}}$ ($D^{\mathcal{G}}$) wzdłuż foliacji \mathcal{F} (\mathcal{G} odpowiednio). Przykładowo, w lokalnym układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$ takim reperem dla koneksji $D^{\mathcal{F}}$ jest $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}})$.

Kolejne stwierdzenie dotyczy zachowania się opisanej wyżej koneksji stowarzyszonej z generyczną 2-tkaniną symplektyczną kowymiaru $(2n, 2n)$ względem symplektomorfizmów zachowujących strukturę tkaniny. Wykorzystamy w nim pojęcie *pchnięcia* $\varphi_* X$ pola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(M)$ wzdłuż dyfeomorfizmu $\varphi : M \rightarrow N$. Pole wektorowe $\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ wyraża się wzorem $\varphi_* X(q) = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(q)$ dla każdego $q \in N$.

Stwierdzenie 4.3. *Niech dane będą dwie rozmaitości symplektyczne (M, ω_M) oraz (N, ω_N) wymiaru $4n$ wyposażone w 2-tkaniny symplektyczne $\mathcal{W}_M = (\mathcal{F}_M, \mathcal{G}_M)$ oraz $\mathcal{W}_N = (\mathcal{F}_N, \mathcal{G}_N)$ kowymiaru $(2n, 2n)$ znajdujące się w położeniu ogólnym względem ω_M, ω_N odpowiednio.*

Niech ∇^M oraz ∇^N oznaczają koneksje afiniczne na M, N odpowiednio spełniające warunki (a) – (e) z tezy Stwierdzenia 4.2. Jeżeli $\varphi : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ jest dyfeomorfizmem o własności $\varphi^*\omega_N = \omega_M$ spełniającym dodatkowo $d\varphi(T\mathcal{F}_M) \subseteq T\mathcal{F}_N$ oraz $d\varphi(T\mathcal{G}_M) \subseteq T\mathcal{G}_N$, to

$$\varphi^*\nabla^N = \nabla^M, \quad (4.1.7)$$

gdzie działanie cofnięcia $\varphi^*\nabla^N$ koneksji ∇^N wzdłuż φ na polach wektorowych $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ określone jest wzorem

$$(\varphi^*\nabla^N)_X Y = \varphi_*^{-1} \nabla_{\varphi_* X}^N (\varphi_* Y). \quad (4.1.8)$$

Dowód. Z tezy o jednoznaczności w Stwierdzeniu 4.2 wystarczy wykazać, że koneksja $\varphi^*\nabla^N$ spełnia określone tam własności (a) – (e). Własności (a), (b) dowodzi się wykorzystując odpowiadające im własności koneksji ∇_N . W związku z tym, że $d\varphi(T\mathcal{F}_M) \subseteq T\mathcal{F}_N$ oraz $d\varphi(T\mathcal{G}_M) \subseteq T\mathcal{G}_N$, mamy $\varphi_* X \in \Gamma(T\mathcal{F}_N)$ oraz $\varphi_* Y \in \Gamma(T\mathcal{G}_N)$ dla $X \in \Gamma(T\mathcal{F}_M)$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G}_M)$, a zatem dla $V \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\varphi^*\nabla^N)_V X &= \varphi_*^{-1} \underbrace{\nabla_{\varphi_* V}^N (\varphi_* X)}_{\in \Gamma(T\mathcal{F}_N)} \in \Gamma(T\mathcal{F}_M), \\ (\varphi^*\nabla^N)_V Y &= \varphi_*^{-1} \underbrace{\nabla_{\varphi_* V}^N (\varphi_* Y)}_{\in \Gamma(T\mathcal{G}_N)} \in \Gamma(T\mathcal{G}_M), \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

co jest równoważne (a), (b). Własność (c) jest bezpośrednią konsekwencją równości

$$\begin{aligned} (\varphi^*\nabla^N)_X Y - (\varphi^*\nabla^N)_Y X &= \varphi_*^{-1} (\nabla_{\varphi_* X}^N \varphi_* Y - \nabla_{\varphi_* Y}^N \varphi_* X) \\ &\stackrel{(c)}{=} \varphi_*^{-1} [\varphi_* X, \varphi_* Y] = [X, Y]. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Dowód ostatnich dwóch własności wykorzystuje założenie o tym, że równość $\varphi^*\omega_N = \omega_M$ zachodzi. Sprawia one, że prawdziwe są zawierania $d\varphi(T\mathcal{F}_M^\omega) \subseteq T\mathcal{F}_N^\omega$ oraz $d\varphi(T\mathcal{G}_M^\omega) \subseteq T\mathcal{G}_N^\omega$. Ich konsekwencją dla wektorów $v \in T\mathcal{F}_M$ oraz $w \in T\mathcal{G}_M$ spełniających $v = v_G + v'_G$ oraz $w = w_F + w'_F$ dla jednoznacznie wyznaczonych $v_G \in T\mathcal{G}_M$, $v'_G \in T\mathcal{G}_M^\omega$, $w_F \in T\mathcal{F}_M$, $w'_F \in T\mathcal{F}_M^\omega$, są równości

$$\begin{aligned} d\varphi(v) &= \underbrace{d\varphi(v_G)}_{T\mathcal{G}_N} + \underbrace{d\varphi(v'_G)}_{T\mathcal{G}_N^\omega}, \\ d\varphi(w) &= \underbrace{d\varphi(w_F)}_{T\mathcal{F}_N} + \underbrace{d\varphi(w'_F)}_{T\mathcal{F}_N^\omega}, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

przy pomocy których uzyskujemy

$$\begin{aligned} \beta_N(d\varphi(v)) &= d\varphi(v_G) = d\varphi(\beta_M(v)), \\ \alpha_N(d\varphi(w)) &= d\varphi(w_F) = d\varphi(\alpha_M(w)). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

dla par rzutowań α_M, β_M oraz α_N, β_N określonych wzorem (4.1.3) na M, N odpowiednio. Z obu relacji przemienności (4.1.12) mamy zatem

$$\varphi_*(\alpha_M(X)) = d\varphi(\alpha_M(X \circ \varphi^{-1})) = \alpha_N(d\varphi(X \circ \varphi^{-1})) = \alpha_N(\varphi_*(X)) \quad (4.1.13)$$

dla $X \in \Gamma(T\mathcal{G})$ oraz analogiczną równość dla β , co łącznie daje

$$\begin{aligned} \alpha_M((\varphi^*\nabla^N)_X Y) &= \alpha_M(\varphi_*^{-1}\nabla_{\varphi_*X}^N(\varphi_*Y)) \\ &= \varphi_*^{-1}(\alpha_N(\nabla_{\varphi_*X}^N(\varphi_*Y))) \\ &\stackrel{(d)}{=} \varphi_*^{-1}(\nabla_{\varphi_*X}^N(\alpha_N(\varphi_*Y))) \\ &= \varphi_*^{-1}(\nabla_{\varphi_*X}^N(\varphi_*(\alpha_M(Y)))) \\ &= (\varphi^*\nabla^N)_X(\alpha_M(Y)) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

dla wszystkich $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$. Własność (d) jest zatem spełniona dla koneksji $\varphi^*\nabla^N$. Podobne rachunki prowadzą do własności (e), co kończy dowód. \square

Powyższe stwierdzenie można sparafrazować w następujący sposób: dla rozmaitości symplektycznej (M, ω) wymiaru $4n$ oraz określonej na niej 2-tkaniny symplektycznej $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kowymiaru $(2n, 2n)$ znajdującej się w położeniu ogólnym względem formy ω koneksja ∇ określona w Stwierdzeniu 4.2 jest koneksją przekształcającą się w sposób niezmienniczy względem symplektomorfizmów zachowujących strukturę 2-tkaniny symplektycznej.

Definicja 4.4. Koneksja ∇ określona w tezie Stwierdzenia 4.2 dla 2-tkaniny symplektycznej \mathcal{W} nazywamy \mathcal{W} -koneksją.

Koneksja ta, w przeciwieństwie do koneksji bilagranżowskiej rozpatrywanej w Rozdziale 3, nie jest w ogólności koneksją symplektyczną [50, 51], tzn. nie zawsze spełnia ona jednocześnie $\nabla\omega = 0$ oraz $T = 0$, gdzie T jest jej tensorem torsji. Dla przykładu, warunek $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\omega)(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}) = 0$ dla $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ we współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniających $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$ jest równoważny

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\omega)(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}) - \omega(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}) - \omega(\frac{\partial}{\partial y_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial y_k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}) - \omega(\underbrace{\pi_{\mathcal{G}}[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}]}_{=0}, \frac{\partial}{\partial y_k}) - \omega(\frac{\partial}{\partial y_j}, \underbrace{\pi_{\mathcal{G}}[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_k}]}_{=0}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}), \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

co odczytujemy we współrzędnych jako stałość wzdłuż liści foliacji \mathcal{F} współczynników przy $dy_j \wedge dy_k$ formy ω dla dowolnych $j, k = 1, 2, \dots, n$. Nie jest zatem trudnością skonstruowanie takiej formy symplektycznej ω , by \mathcal{W} -koneksja ∇ tkaniny $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ spełniała $\nabla\omega \neq 0$. Co więcej, w ogólności torsja T koneksji ∇ również może być niezerowa, pomimo znikania $T(X, Y)$ dla argumentów $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz $Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$ z własności (c) \mathcal{W} -koneksji ze Stwierdzenia 4.2. Przykład formy symplektycznej ω , która indukuje \mathcal{W} -koneksję ∇ o niezerowej torsji spełniającą $\nabla\omega \neq 0$, podamy w Rozdziale 4.1.1, zaraz po wyprowadzeniu postaci współrzędnościowej koneksji i jej krzywizny.

Pochylmy się jeszcze na chwilę nad doбором nazewnictwa. Ze względu na pewien stopień dowolności w doborze \mathcal{W} -koneksji nie możemy powiedzieć, że koneksja ta jest *kanoniczna* lub *naturalna* jak w poprzednich rozdziałach. Zastępując bowiem warunki (d) oraz (e) np. warunkami

$$(d') \quad \nabla_Y \circ \beta^{-1} = \beta^{-1} \circ \nabla_Y \text{ dla } Y \in \Gamma(T\mathcal{G}),$$

$$(e') \quad \nabla_X \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \nabla_X \text{ dla } X \in \Gamma(T\mathcal{F}),$$

otrzymamy inną koneksję $\widetilde{\nabla}$ niezmienniczą względem symplektomorfizmów zachowujących strukturę tkaniny. Niemniej, działania obu koneksji na polach $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ stycznych do jednej z foliacji tkaniny są sprzężone endomorfizmem wiązki stycznej

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\alpha \circ \beta) (\nabla_X ((\alpha \circ \beta)^{-1}(Y))), \quad (4.1.16)$$

oraz analogicznie dla $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$. W przeciągu kilku kolejnych stron udowodnimy szereg twierdzeń dotyczących koneksji ∇ , które można z powodzeniem przenieść na przypadek koneksji $\widetilde{\nabla}$ zastępując w ich sformułowaniach oraz dowodach symbol α przez β^{-1} oraz symbol β przez α^{-1} . W szczególności, śledząc uważnie treść Stwierdzenia 4.6 okaże się, że dla dowolnego punktu $p \in M$ znikanie krzywizny R_p koneksji ∇ w dowolnym punkcie p jest równoważne znikaniu jej odpowiednika \widetilde{R}_p względem koneksji $\widetilde{\nabla}$. Niezmienniki krzywiznowe otrzymane przy pomocy obu koneksji można więc uznać za równoważne. Z tego względu skupimy naszą uwagę tylko na jednej z tych koneksji.

4.1.1 Postać współrzędnościowa \mathcal{W} -koneksji

Wybermy teraz lokalny układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ w którym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$. Macierz $\hat{\omega}$ formy ω względem reperu współrzędno-

ściowego ma naturalną strukturę blokową

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & A \\ -A^T & \omega_y \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

odpowiadającą podziałowi reperu na dwie części: pierwsza złożona z wektorów $\frac{\partial}{\partial x_i}$, a druga z wektorów $\frac{\partial}{\partial y_j}$ dla $i, j = 1, 2, \dots, 2n$. Ponieważ obcięcia formy ω do $T\mathcal{F}$ oraz do $T\mathcal{G}$ są niezdegenerowane, odpowiadające im macierze $\omega_x, \omega_y \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ są odwracalne.

Przypomnijmy teraz rzutowania α, β określone we wzorze (4.1.3). Naszym obecnym celem jest odnaleźć ich postać w ustalonych wyżej współrzędnych. W tym celu zauważmy, że wektor $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}} \in TM$ dla $v_{\mathcal{F}} \in T\mathcal{F}, v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$ leży w $T\mathcal{F}^\omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{bmatrix} \omega_x & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\mathcal{F}} \\ v_{\mathcal{G}} \end{bmatrix} = \omega_x v_{\mathcal{F}} + A v_{\mathcal{G}} = 0, \quad (4.1.18)$$

co jest równoważne $v_{\mathcal{F}} = -\omega_x^{-1} A v_{\mathcal{G}}$. Ponieważ wiązka styczna zapisuje się jako suma Whitneya $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^\omega$, każdy wektor $v \in TM$ zapisuje się w sposób jednoznaczny jako suma rzutów na oba składniki. W szczególności, wektor $u \in T\mathcal{G}$ można przedstawić w postaci macierzowej jako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}}_{\in T\mathcal{G}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in T\mathcal{F}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega_x^{-1} A v_{\mathcal{G}} \\ v_{\mathcal{G}} \end{bmatrix}}_{\in T\mathcal{F}^\omega} \quad (4.1.19)$$

dla pewnych $w \in T\mathcal{F}, v_{\mathcal{G}} \in T\mathcal{G}$. Porównując współrzędne uzyskujemy równości $v_{\mathcal{G}} = u$ oraz $w_{\mathcal{F}} = \omega_x^{-1} A u_{\mathcal{G}}$. Jeżeli więc zapiszemy działanie odwzorowania α w postaci macierzowej jako $\alpha(\sum_j u_j \frac{\partial}{\partial y_j}) = \sum_{i,j} \hat{\alpha}_{ij} u_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ dla pewnej macierzy $\hat{\alpha} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$, to

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} \cdot u &= \omega_x^{-1} A u, & \text{oraz} \\ \hat{\beta} \cdot w &= -\omega_y^{-1} A^T w & \text{analogicznie} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

dla $u \in T\mathcal{G}, w \in T\mathcal{F}$.

Powyższe wyrażenia określające macierze rzutów $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ znajdują swoje zastosowanie podczas korzystania z jawnego wzoru na działanie \mathcal{W} -koneksji ∇ ustalonej 2-tkaniny symplektycznej \mathcal{W} znajdującej się w położeniu ogólnym względem ω , który podamy poniżej. W tym celu znów posłużymy się metodą reperu ruchomego Cartana [13], w której macierz σ 1-form σ_j^i koneksji ∇ w ustalonym reperze (e_1, \dots, e_{4n}) o reperze dualnym (e_1^*, \dots, e_{4n}^*) określamy przez równość $e_j^*(\nabla_{e_k} e_i) = \sigma_j^i(e_k)$ dla $i, j, k = 1, 2, \dots, 4n$. Zastosowanie znajdują tu również operatory częściowe d_x, d_y związane z różniczką zewnętrzną $d = d_x + d_y$, szerzej opisane w akapicie otaczającym równość (3.1.15) oraz w [26].

Stwierdzenie 4.5. Niech ∇ będzie \mathcal{W} -koneksją 2-tkaniny symplektycznej $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kowymiary $(2n, 2n)$ znajdującej się w położeniu ogólnym względem formy symplektycznej ω na rozmaitości M wymiaru $4n$ oraz niech $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ będzie dowolnym układem współrzędnych spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$. Macierz σ form koneksji ∇ w repere współrzędnościowym $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}})$ przyjmuje postać

$$\sigma = \begin{bmatrix} \hat{\beta}^{-1} d_x \hat{\beta} & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}^{-1} d_y \hat{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (4.1.21)$$

gdzie $\hat{\alpha} = \omega_x^{-1} A$ oraz $\hat{\beta} = -\omega_y^{-1} A^T$ oznaczają macierze odwzorowań α, β we współrzędnych.

Dowód. Stwierdzenie 4.2 charakteryzujące ∇ mówi nam, że foliacje \mathcal{F}, \mathcal{G} są równoległe względem działania koneksji ∇ . Orzekają o tym własności (a) oraz (b) ogólnych \mathcal{W} -koneksji. Konsekwencją tego faktu dla postaci współrzędnościowej koneksji ∇ jest zerowanie się bloków macierzy koneksji σ znajdujących się poza główną przekątną. Dodatkowo, z uwagi na wzór (4.1.4) mamy

$$\begin{aligned} \sigma_j^i \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) &= dx_j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = dx_j \left(\pi_{\mathcal{F}} \left(\left[\frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right) \right) = 0, \\ \sigma_{2n+j}^{2n+i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= dy_j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = dy_j \left(\pi_{\mathcal{G}} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right] \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

dla $i, j, k = 1, 2, \dots, 2n$. Możemy zatem zapisać

$$\sigma = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad (4.1.23)$$

dla pewnych funkcji $B : (\mathbb{R}^{4n}, 0) \rightarrow M_{2n \times 2n}(T^*\mathcal{F})$ oraz $C : (\mathbb{R}^{4n}, 0) \rightarrow M_{2n \times 2n}(T^*\mathcal{G})$ o wartościach w macierzach 1-form określonych na wiązках kostycznych do poszczególnych foliacji. Zastosujmy teraz własności (d) oraz (e) \mathcal{W} -koneksji tkaniny \mathcal{W} by odnaleźć te macierze. Bez utraty ogólności obliczenia wykonamy jedynie dla macierzy B .

$$\begin{aligned} B_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= \sigma_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = dx_j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = dx_j \left(\beta^{-1} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \beta \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_l dx_j \left(\beta^{-1} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \left(\hat{\beta}_{li} \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \right) \\ &= \sum_l dx_j \left(\beta^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\beta}_{li} \right) \frac{\partial}{\partial y_l} \right) = \sum_{l,m} dx_j \left((\hat{\beta}^{-1})_{ml} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\beta}_{li} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\ &= \sum_l (\hat{\beta}^{-1})_{jl} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\beta}_{li} \right) = (\hat{\beta}^{-1} d_x \hat{\beta}) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Zastępując w powyższych rachunkach zmienne x_i zmiennymi y_i dla $i = 1, 2, \dots, 2n$ oraz odwzorowanie α odwzorowaniem β otrzymamy postać macierzy C . Uzyskane w ten sposób wyrażenia składają się na tezę stwierdzenia. \square

Stwierdzenie 4.6. *W kontekście Stwierdzenia 4.5 macierz 2-form krzywizny \mathcal{W} -koneksji ∇ tkaniny \mathcal{W} w reperze współrzędnościowym to*

$$\Omega = \begin{bmatrix} d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}) & 0 \\ 0 & d_x(\hat{\alpha}^{-1}d_y\hat{\alpha}) \end{bmatrix}. \quad (4.1.25)$$

Dowód. Zauważmy, że macierz Ω ma tę samą strukturę blokowo-diagonalną co macierz 1-form koneksji σ . Wynika to wprost z równania strukturalnego Cartana $\Omega = d\sigma + \sigma \wedge \sigma$. Wykorzystajmy to równanie do obliczenia obu niezerowych bloków

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & \Omega_y \end{bmatrix} \quad (4.1.26)$$

macierzy Ω z osobna. Bez utraty ogólności rozpatrzmy jedynie macierz Ω_x . Wykorzystując tożsamość $d = d_x + d_y$ w pierwszej równości, a także regułę Leibniza w połączeniu z $d_x^2 = 0$ w drugiej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\Omega_x)_i^j &= d(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}) + (\hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta}) \wedge \hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta})) \\ &= d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}) + (d_x(\hat{\beta}^{-1}) \wedge d_x\hat{\beta}) + (\hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta}) \wedge \hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta})) \\ &= d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}) - (\hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta})\hat{\beta}^{-1} \wedge d_x\hat{\beta}) + (\hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta}) \wedge \hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta})) \\ &= d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}), \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

co wraz z analogicznymi rachunkami dla drugiego bloku Ω_y dowodzi tezy stwierdzenia. \square

W oparciu o powyższe stwierdzenia oraz wzór (4.1.15) możemy podać przykład tkaniny symplektycznej, której \mathcal{W} -koneksja ∇ nie jest ani beztorsyjna, ani prawie symplektyczna względem danej formy symplektycznej ω (tzn. nie spełnia $\nabla\omega = 0$).

Przykład 4.1. Ustalmy 2-formę ω na zbiorze otwartym $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^4 \subseteq \mathbb{R}^4$ postaci

$$\begin{aligned} \omega &= d\left((y_2 - 2x_2 + x_2y_2) dx_1 + (x_2 - y_2 + x_2y_2) dy_1\right) \\ &= (2 - y_2) dx_1 \wedge dx_2 + (1 - x_2) dy_1 \wedge dy_2 \\ &\quad + (1 + x_2) dx_1 \wedge dy_2 + (1 + y_2) dx_2 \wedge dy_1, \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

oraz 2-tkaninę $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o foliach generowanych przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$. Powyższa forma, jako różniczka zewnętrzna 1-formy, jest formą zamkniętą. Jej macierz $\hat{\omega}$ we współrzędnych (x_1, x_2, y_1, y_2) wynosi

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 2 - y_2 & 0 & 1 + x_2 \\ -2 + y_2 & 0 & 1 + y_2 & 0 \\ 0 & -1 - y_2 & 0 & 1 - x_2 \\ -1 - x_2 & 0 & -1 + x_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.29)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left((2 - y_2)(1 - x_2) + (1 + x_2)(1 + y_2) \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \\ &= \left(3 - x_2(1 - 2y_2) \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0\end{aligned}\tag{4.1.30}$$

forma ω jest niezdegenerowana. To dowodzi, że forma ω jest formą symplektyczną na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^4 \subseteq \mathbb{R}^4$. Zwróćmy teraz uwagę na macierz $A = [a_{ij}]$ o współczynnikach $a_{ij} = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$ dla $i, j = 1, 2$, której postać można odczytać z górnego-prawego bloku macierzy $\hat{\omega}$. Ponieważ jest ona nieosobliwa, macierze $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ rzutowań α, β zdefiniowanych w (4.1.3) mają postać

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{y_2+1}{y_2-2} & 0 \\ 0 & \frac{1+x_2}{2-y_2} \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1+x_2}{1-x_2} & 0 \\ 0 & \frac{y_2+1}{x_2-1} \end{bmatrix},\tag{4.1.31}$$

zgodnie ze wzorem (4.1.20). W szczególności są one odwracalne, a więc odwzorowania α, β są izomorfizmami wiązek $T\mathcal{F}$ i $T\mathcal{G}$. Tkanina \mathcal{W} znajduje się zatem w położeniu ogólnym względem formy ω . W szczególności \mathcal{W} -koneksja ∇ tkaniny \mathcal{W} istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie ze Stwierdzenia 4.2.

Ze wzoru (4.1.15) wynika natomiast, że

$$\left(\nabla \frac{\partial}{\partial x_2} \omega \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (1 - x_2) = -1 \neq 0.\tag{4.1.32}$$

Stąd \mathcal{W} -koneksja ∇ tkaniny \mathcal{W} nie spełnia $\nabla \omega = 0$. Aby wykazać, że ∇ posiada niezerową torsję, użyjmy Stwierdzenia 4.5 do obliczenia torsji we współrzędnych. Z definicji torsji otrzymujemy

$$\begin{aligned}T\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \nabla \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} - \nabla \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \\ &= \sum_{j,i} \hat{\beta}_{ji}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\beta}_{i2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\beta}_{i1} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= - \left(\frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} = \left(\frac{2}{x_2^2-1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0.\end{aligned}\tag{4.1.33}$$

Koneksja ∇ nie jest zatem ani beztorsyjna, ani prawie symplektyczna.

4.1.2 Interpretacja krzywizny \mathcal{W} -koneksji

Przypomnijmy notację $E|_S$ obcięcia wiązki wektorowej $E \rightarrow M$ do podrozmaitości $S \subseteq M$, które utożsamiamy z cofnięciem $\iota_S^* E$ wiązki E wzdłuż zanurzenia $\iota_S : S \hookrightarrow M$. W tym podrozdziale skupimy się na konsekwencjach tego, że \mathcal{W} -koneksja ∇ tkaniny symplektycznej $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ jest płaska wzdłuż każdego z jej liści $S \in \mathcal{F}$ lub $S \in \mathcal{G}$. Oznacza to, że krzywizna obcięcia $\nabla|_S : TS \times \Gamma(TM|_S) \rightarrow \Gamma(TM|_S)$ koneksji ∇ do wiązki pól wektorowych na M wzdłuż S znika. Można to wykazać przynajmniej na dwa sposoby.

Po pierwsze, własność tą można odczytać ze wzoru (4.1.25) na macierz 2-form krzywizny Ω koneksji ∇ we współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniających $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$. Wynika ona wprost z równości $\Omega(X, Y) = 0$ dla każdej pary $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ oraz każdej pary $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{G})$, o czym łatwo się przekonać wykonując odpowiednie obliczenia we współrzędnych. Inny sposób polega na jawnym skonstruowaniu reperu równoległego wiązki $TM|_S$ na S względem $\nabla|_S$.

Stwierdzenie 4.7. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie 2-tkaniną symplektyczną kowymiaru $(2n, 2n)$ znajdującą się w położeniu ogólnym względem formy symplektycznej ω na rozmaitości M wymiaru $4n$ oraz niech ∇ będzie jej \mathcal{W} -koneksją. Ustalmy liść $S \in \mathcal{F}$ lub $S \in \mathcal{G}$ tkaniny \mathcal{W} . Istnieje wtedy reper równoległy (e_1, \dots, e_{4n}) wiązki $TM|_S$ koneksji $\nabla|_S$ taki, że wektory (e_1, \dots, e_{2n}) rozpinają $T\mathcal{F}$, podczas gdy wektory $(e_{2n+1}, \dots, e_{4n})$ rozpinają $T\mathcal{G}$. W danym układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$ za wektory e_i dla $i = 1, 2, \dots, 4n$ można przyjąć*

$$\begin{aligned} e_i &= \beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right), & e_\gamma &= \frac{\partial}{\partial y_i} & \text{jeżeli } S \in \mathcal{F}, \text{ oraz} \\ e_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & e_\gamma &= \alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) & \text{jeżeli } S \in \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

gdzie $i = 1, \dots, 2n$ oraz $\gamma = 2n + 1, \dots, 4n$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $S \in \mathcal{F}$ i ustalmy układ współrzędnych jak w tezie stwierdzenia. Przestrzeń styczną do liścia S rozpinają wektory $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}})$, zatem stosując operator $\nabla \frac{\partial}{\partial x_i}$ do zaproponowanego reperu na podstawie własności (e) \mathcal{W} -koneksji ze Stwierdzenia 4.2 otrzymujemy

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \pi_{\mathcal{G}} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right] = 0, \quad (4.1.35)$$

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta^{-1}(\frac{\partial}{\partial y_j})) = \beta^{-1} \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta(\beta^{-1}(\frac{\partial}{\partial y_j}))) = \beta^{-1} (\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}) = 0. \quad (4.1.36)$$

dla $i = 1, 2, \dots, 2n$. Skoro pola wektorowe $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}})$ rozpinają wiązkę $T\mathcal{G}$, podczas gdy β jest izomorfizmem wiązek $T\mathcal{F}$ oraz $T\mathcal{G}$, układ $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}}, \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_{2n}})$ tworzy reper $TM|_S$, który dzięki równościom (4.1.35), (4.1.36) jest równoległy względem koneksji $\nabla|_S$. Analogicznie dowodzimy części tezy stwierdzenia dotyczącej liścia $S \in \mathcal{G}$. \square

Istnienie reperów równoległych względem \mathcal{W} -koneksji $\nabla|_S$ pozwala nam scharakteryzować przesunięcie równoległe wzdłuż liści S tkaniny \mathcal{W} .

Stwierdzenie 4.8. Niech $M, \omega, \mathcal{W}, \nabla$ będą jak w Stwierdzeniu 4.7, oraz niech $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ będzie pewnym lokalnym układem współrzędnych zadany na zbiorze otwartym $U \subseteq M$ i spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$. Ustalmy dwa punkty $p, q \in S$ leżące na liściu S foliacji $\mathcal{F}|_U$ ($\mathcal{G}|_U$ tkaniny \mathcal{W} obciętej do zbioru U).

(1) Określmy translację współrzędnościową $T_{q,p}^S$ z punktu p do punktu q wzorem

$$\begin{aligned} T_{q,p}^S : T_p\mathcal{G} &\rightarrow T_q\mathcal{G}; & T_{q,p}^S \left(\sum_{j=1}^{2n} v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p \right) &= \sum_{j=1}^{2n} v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_q & \text{jeżeli } S \in \mathcal{F}|_U, \\ T_{q,p}^S : T_p\mathcal{F} &\rightarrow T_q\mathcal{F}; & T_{q,p}^S \left(\sum_{j=1}^{2n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) &= \sum_{j=1}^{2n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_q & \text{jeżeli } S \in \mathcal{G}|_U. \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Przesunięcie równoległe $P_\gamma : T_p M \rightarrow T_q M$ wzdłuż dowolnej krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ zawartej w $U \cap S$ takiej, że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma(1) = q$ zadaje się wzorem

$$\begin{aligned} P_\gamma(v) &= (\beta^{-1} \circ T_{q,p}^S \circ \beta)(v_{\mathcal{F}}) + T_{q,p}^S(v_{\mathcal{G}}) & \text{jeżeli } S \in \mathcal{F}|_U, \\ P_\gamma(v) &= T_{q,p}^S(v_{\mathcal{F}}) + (\alpha^{-1} \circ T_{q,p}^S \circ \alpha)(v_{\mathcal{G}}) & \text{jeżeli } S \in \mathcal{G}|_U, \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

dla wektora $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}} \in T_p M$ rozkładającego się jednoznacznie na składowe styczne do foliacji $v_{\mathcal{F}} \in T_p\mathcal{F}$ oraz $v_{\mathcal{G}} \in T_p\mathcal{G}$. W szczególności, przesunięcie to nie zależy od wyboru krzywej γ o powyższych własnościach.

(2) Macierz $P_{q,p}$ powyższego przesunięcia równoległego P_γ w układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ jest macierz blokowa

$$P_{q,p} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}^{-1}(q)\hat{\beta}(p) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{jeżeli } S \in \mathcal{F}|_U, \quad (4.1.39)$$

$$P_{q,p} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}^{-1}(q)\hat{\alpha}(p) \end{bmatrix} \quad \text{jeżeli } S \in \mathcal{G}|_U, \quad (4.1.40)$$

gdzie $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ to macierze rzutów α, β dane wzorem (4.1.20), podczas gdy I to macierz jednostkowa.

Dowód. Przyjmijmy wpraw, że $S \in \mathcal{F}|_U$. Stwierdzenie 4.7 orzeka, że pola wektorowe $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}}$ są równoległe względem koneksji $\nabla|_S$. Z jednoznaczności pól równoległych wzdłuż krzywych mamy $P_\gamma(\frac{\partial}{\partial y_j}|_p) = \frac{\partial}{\partial y_j}|_q$ dla $j = 1, 2, \dots, 2n$. Pola $\frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}}|_p$ rozpinają $T_p\mathcal{G}$, zatem istotnie $P_\gamma(v) = T_{q,p}^S(v)$ dla $v \in T_p\mathcal{G}$ z liniowości przesunięcia równoległego P_γ . Stąd natychmiast wyznaczamy bloki po prawej stronie macierzy $P_{q,p}$ we wzorze (4.1.39): są nimi dokładnie $[0 \ I]^T$.

Za pozostałe elementy reperu równoległego względem $\nabla|_S$ można przyjąć

$$e_j = \beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_i (\hat{\beta}^{-1})_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(T\mathcal{F}), \quad (4.1.41)$$

dla $j = 1, 2, \dots, 2n$. Wynikająca z równoległości tych pól tożsamość $P_\gamma((e_j)|_p) = (e_j)|_q$ prowadzi do

$$P_\gamma(\beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)|_p) = \beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)|_q = \beta^{-1}(T_{q,p}^S\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)|_p), \quad (4.1.42)$$

co po podstawieniu $\frac{\partial}{\partial y_j}|_p = \beta(e_j|_p)$ redukuje się do

$$P_\gamma(v) = \beta^{-1} \circ T_{q,p}^S \circ \beta(v) \quad \text{dla } v \in T_p\mathcal{F} \quad (4.1.43)$$

za sprawą liniowości P_γ oraz tego, że układ $(e_1|_p, \dots, e_{2n}|_p)$ rozpina $T_p\mathcal{F}$. Aby odnaleźć fragment macierzy współrzędnościowej $P_{q,p}$ dotyczący wektorów $v \in T_p\mathcal{F}$, należy obliczyć $P_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)|_p$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)|_p &= P_\gamma(\beta^{-1}(\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)|_p)) = P_\gamma(\sum_j \hat{\beta}_{ji}(p)\beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)|_p) \\ &= \sum_j \hat{\beta}_{ji}(p)P_\gamma(\beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)|_p) = \sum_j \hat{\beta}_{ji}(p)\beta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)|_q \\ &= \sum_{j,k} (\hat{\beta}^{-1})_{kj}(q)\hat{\beta}_{ji}(p)\frac{\partial}{\partial x_k}|_q = \sum_k (\hat{\beta}^{-1}(q)\hat{\beta}(p))_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}|_q \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

dowodząc tezy stwierdzenia dla $S \in T\mathcal{F}|_U$. Zamieniając rolami foliacje \mathcal{F} oraz \mathcal{G} , zmienne x_j ze zmiennymi y_j dla $j = 1, 2, \dots, 2n$ oraz odwzorowanie α z odwzorowaniem β w powyższym rozumowaniu uzyskujemy natychmiast tezę dla $S \in T\mathcal{G}|_U$, co kończy dowód. \square

Płaskość \mathcal{W} -koneksji ∇ ma następującą charakteryzację w terminach macierzy $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ odwzorowań α, β we współrzędnych prostujących tkaninę.

Lemat 4.9. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie 2-tkaniną symplektyczną kowymiaru $(2n, 2n)$ znajdującą się w położeniu ogólnym względem formy symplektycznej ω na rozmaitości M wymiaru $4n$, oraz niech $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ będzie układem współrzędnych spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$ o środku w ustalonym punkcie $p \in M$. Krzywizna \mathcal{W} -koneksji ∇ tkaniny \mathcal{W} znika w otoczeniu punktu p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją kielki funkcji gładkich $g, h, k, l : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow \text{GL}(2n, \mathbb{R})$ o wartościach macierzowych, dla których zachodzi*

$$\hat{\alpha}(x, y) = g(x) \cdot h(y), \quad \hat{\beta}(x, y) = k(y) \cdot l(x). \quad (4.1.45)$$

Dowód. Załóżmy, że koneksja ∇ jest płaska w otoczeniu punktu p . Ze wzoru na 2-formy krzywizny koneksji ∇ podanego w treści Stwierdzenia 4.10 mamy $d_x(\hat{\alpha}^{-1}d_y\hat{\alpha}) = 0$ oraz

$d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}) = 0$. Z zastosowania Lematu 3.5 do pierwszej równości otrzymujemy kielki $g, h : (\mathbb{R}^{4n}, 0) \rightarrow M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ funkcji gładkich o wartościach macierzowych spełniających $\hat{\alpha}(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ dla wszystkich $(x, y) \in \mathbb{R}^{4n}$. Obie macierze są odwracalne za sprawą odwracalności $\hat{\alpha}$. Aby uzyskać analogiczny wynik dla $\hat{\beta}$, przekształćmy wyrażenie $d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta})^T$ do postaci

$$\begin{aligned}
(d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}))^T &= (d_y\hat{\beta}^{-1} \wedge d_x\hat{\beta} + \hat{\beta}^{-1} \cdot (d_yd_x\hat{\beta}))^T \\
&= (-\hat{\beta}^{-1}(d_y\hat{\beta})\hat{\beta}^{-1} \wedge d_x\hat{\beta} - \hat{\beta}^{-1}d_xd_y\hat{\beta})^T \\
&= (-\hat{\beta}^{-1}(d_y\hat{\beta} \wedge \hat{\beta}^{-1}(d_x\hat{\beta})\hat{\beta}^{-1})\hat{\beta} - \hat{\beta}^{-1} \wedge d_xd_y\hat{\beta})^T \\
&= (\hat{\beta}^{-1}(d_y\hat{\beta} \wedge d_x(\hat{\beta}^{-1}))\hat{\beta} - \hat{\beta}^{-1} \wedge d_xd_y\hat{\beta} \cdot (\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta}))^T \\
&= -\hat{\beta}^T(d_x(\hat{\beta}^T)^{-1} \wedge d_y\hat{\beta}^T + (\hat{\beta}^T)^{-1}d_xd_y\hat{\beta}^T)(\hat{\beta}^T)^{-1} = -\hat{\beta}^T(d_x((\hat{\beta}^T)^{-1}(d_y\hat{\beta}^T)))(\hat{\beta}^T)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Ponieważ lewa strona powyższej równości jest równa 0, również wyrażenie $d_x(f^{-1}d_yf)$ dla $f = \hat{\beta}^T$ jest równe zero. Znow z Lematu 3.5 otrzymujemy kielki w zerze funkcji gładkich $k, l : (\mathbb{R}^{4n}, 0) \rightarrow M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ o wartościach macierzowych spełniające równość $\hat{\beta}(x, y)^T = l(x)^T k(y)^T$ w każdym punkcie $(x, y) \in \mathbb{R}^{4n}$. Jest ona równoważna $\hat{\beta}(x, y) = k(y)l(x)$, co należało wykazać.

Aby udowodnić, że warunek (4.1.45) jest wystarczający do znikania krzywizny na otoczeniu punktu p , obliczmy macierz 2-form krzywizny Ω koneksji ∇ przy pomocy wzoru (4.1.25). Uzyskamy kolejno

$$\begin{aligned}
d_x\hat{\beta} &= k(y) \cdot (d_xl(x)), \\
d_y(\hat{\beta}^{-1}d_x\hat{\beta}) &= d_y(l(x)^{-1}k(y)^{-1}k(y) \cdot (d_xl(x))) = d_y(l(x)^{-1}(d_xl(x))) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

Analogiczny rachunek dla macierzy $\hat{\alpha}$ dowodzi tezy lematu. \square

Powyższemu twierdzeniu o płaskości \mathcal{W} -koneksji ∇ można przypisać następującą interpretację geometryczną. Wybierzmy dostatecznie małe wektory $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, dwa liście

$$S_{\mathcal{F}, x_0} = \{(x, y) : \forall_i x_i = x_{0,i}\}, \quad S_{\mathcal{F}, x_0 + \delta} = \{(x, y) : \forall_i x_i = x_{0,i} + \delta_i\} \tag{4.1.48}$$

foliacji $\mathcal{F}|_U$ oraz dwa liście

$$S_{\mathcal{G}, y_0} = \{(x, y) : \forall_i y_i = y_{0,i}\}, \quad S_{\mathcal{G}, y_0 + \varepsilon} = \{(x, y) : \forall_i y_i = y_{0,i} + \varepsilon_i\} \tag{4.1.49}$$

foliacji $\mathcal{G}|_U$ wewnątrz układu współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ na dziedzinie otwartej U spełniającego $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$. Wzajemne przecięcia tych liści wyznaczają cztery punkty

$$\begin{aligned} r &= (x_0, y_0 + \varepsilon) \in S_{\mathcal{F}, x_0} \cap S_{\mathcal{G}, y_0 + \varepsilon}, & s &= (x_0 + \delta, y_0 + \varepsilon) \in S_{\mathcal{F}, x_0 + \delta} \cap S_{\mathcal{G}, y_0 + \varepsilon}, \\ p &= (x_0, y_0) \in S_{\mathcal{F}, x_0} \cap S_{\mathcal{G}, y_0}, & q &= (x_0 + \delta, y_0) \in S_{\mathcal{F}, x_0 + \delta} \cap S_{\mathcal{G}, y_0}, \end{aligned}$$

które następnie łączymy łamaną współrzędnościową $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ daną wzorem

$$\gamma(t) = \begin{cases} (x_0 + 4t\delta, y_0), & t \in [0, \frac{1}{4}], \\ (x_0 + \delta, y_0 + (4t - 1)\varepsilon), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ (x_0 + (3 - 4t)\delta, y_0 + \varepsilon), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ (x_0, y_0 + (4 - 4t)\varepsilon), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \quad (4.1.50)$$

Przyjmijmy skrótowe oznaczenia $\hat{\alpha}_P = \hat{\alpha}(x, y)$ dla dowolnego punktu $P = (x, y)$, a także analogiczne oznaczenia dla macierzy $\hat{\beta}, \hat{\alpha}^{-1}$ oraz $\hat{\beta}^{-1}$. Zgodnie ze Stwierdzeniem 4.8 przesunięcie równoległe $P_\gamma(v)$ dowolnego wektora $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}} \in T_p M$ dla pewnych $v_{\mathcal{F}} \in T_p \mathcal{F}$, $v_{\mathcal{G}} \in T_p \mathcal{G}$ wzdłuż pętli γ zadaje się wzorem współrzędnościowym

$$\begin{aligned} P_\gamma(v) &= P_{p,r} \cdot P_{r,s} \cdot P_{s,q} \cdot P_{q,p} v \\ &= \hat{\beta}_r^{-1} \hat{\beta}_s \hat{\beta}_q^{-1} \hat{\beta}_p v_{\mathcal{F}} + \hat{\alpha}_p^{-1} \hat{\alpha}_r \hat{\alpha}_s^{-1} \hat{\alpha}_q v_{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

Gdy \mathcal{W} -koneksja ∇ jest płaska, macierze $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ możemy zapisać jako iloczyny macierzowe $\hat{\alpha}(x, y) = g(x)h(y)$ oraz $\hat{\beta}(x, y) = k(y)l(x)$ dla kiełków funkcji g, h, k, l o wartościach macierzowych zgodnie z Lematem 4.9. Otrzymamy wtedy że dla $x = x_0 + \delta$ oraz $y = y_0 + \varepsilon$ zachodzi

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_r^{-1} \hat{\beta}_s \hat{\beta}_q^{-1} \hat{\beta}_p &= (l(x_0)^{-1} k(y)^{-1}) \cdot (k(y) l(x)) \cdot (l(x)^{-1} k(y_0)^{-1}) \cdot (k(y_0) l(x_0)) = I, \\ \hat{\alpha}_p^{-1} \hat{\alpha}_r \hat{\alpha}_s^{-1} \hat{\alpha}_q &= (h(y_0)^{-1} g(x_0)^{-1}) \cdot (g(x_0) h(y)) \cdot (h(y)^{-1} g(x)^{-1}) \cdot (g(x) h(y_0)) = I. \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

W szczególności oznacza to, że jeżeli punkty p oraz q leżą w tym samym układzie współrzędnych prostującym tkaninę \mathcal{W} , to przesunięcie równoległe $P_\gamma(v)$ wektora $v \in T_p M$ wzdłuż dowolnej krzywej kawałkami gładkiej łączącej p i q , której każdy segment gładki jest styczny do pewnego liścia tkaniny \mathcal{W} , nie zależy od wyboru γ .

Polegając na ciągłości odwzorowania P_γ względem krzywych γ łączących p i q w topologii zwarto-otwartej można udowodnić, że wartość $P_\gamma(v)$ lokalnie zależy jedynie jedynie

od położenia punktów p, q , lecz nie od kształtu samej krzywej γ . Fakt ten potwierdza ogólna teoria, która orzeka, że gdy krzywizna koneksji ∇ znika, istnieją lokalne repery równoległe względem ∇ [13, §4-1]. W tym wypadku, z gładkości przesunięcia równoległego względem punktu końcowego q wynika, że dowolny wektor styczny $v \in T_pM$ rozszerza się do lokalnego pola wektorowego $V \in \mathfrak{X}(M)$, które jest równoległe względem koneksji ∇ . Fakt ten wykorzystamy w dowodzie kolejnego lematu.

Lemat 4.10. *W kontekście Lematu 4.9 \mathcal{W} -koneksja ∇ jest płaska i beztorsyjna w otoczeniu punktu p wtedy i tylko wtedy, gdy w pewnym układzie współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniającym $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$ o dziedzinie zawartej wewnątrz tego otoczenia zachodzi*

$$\hat{\alpha}(x, y) = \hat{\alpha}(x), \quad \hat{\beta}(x, y) = \hat{\beta}(y). \quad (4.1.53)$$

Dowód. Załóżmy, że koneksja ∇ jest płaska i beztorsyjna w otoczeniu punktu p . Wybierzmy bazę $(e_{1|p}, \dots, e_{2n|p})$ przestrzeni $T_p\mathcal{F}$ oraz $(f_{1|p}, \dots, f_{2n|p})$ przestrzeni $T_p\mathcal{G}$. Razem tworzą one bazę przestrzeni T_pM . Rozszerzmy ją poprzez przesunięcie równoległe do gładkiego reperu lokalnego $(e_1, \dots, e_{2n}, f_1, \dots, f_{2n})$. Reper ten nie zależy od wyboru krzywych wzdłuż których następuje przesunięcie dzięki płaskości koneksji ∇ . Ponieważ koneksja ∇ jest beztorsyjna, bezpośredni rachunek wykorzystujący równość $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ potwierdza, że $[e_i, e_j] = [e_i, f_j] = [f_i, f_j] = 0$ dla $i, j = 1, 2, \dots, 2n$. Możemy w związku z tym odnaleźć układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniający równości $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ oraz $f_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ dla $i, j = 1, 2, \dots, 2n$ [36, Theorem 9.46].

Pokażemy teraz, że przesunięcie równoległe wzdłuż krzywej γ łączącej punkt p z punktem q przekształca $T_p\mathcal{F}$ w $T_q\mathcal{F}$ oraz $T_p\mathcal{G}$ w $T_q\mathcal{G}$. Skupmy się na wektorach $v \in T_p\mathcal{F}$ – drugi przypadek dowodzi się analogicznie. Rozszerzmy $v \in T_p\mathcal{F}$ do równoległego pola wektorowego $V \in \Gamma(TM|_\gamma)$ wzdłuż krzywej γ rozwiązując liniowe równanie różniczkowe zwyczajne $\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$. Pole V rozkłada się w sposób jednoznaczny na sumę $V = V_{\mathcal{F}} + V_{\mathcal{G}}$ części stycznych $V_{\mathcal{F}}, V_{\mathcal{G}}$ do foliacji \mathcal{F}, \mathcal{G} odpowiednio. Z własności (a) oraz (b) \mathcal{W} -koneksji (Stwierdzenie 4.2) otrzymujemy, że $\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$ pociąga za sobą $\nabla_{\dot{\gamma}} V_{\mathcal{G}} = 0$. Równaniu temu towarzyszy warunek początkowy $V_{\mathcal{G}|p} = 0$, więc z jednoznaczności rozwiązań liniowych równań różniczkowych zwyczajnych [37, Theorem 4.11] otrzymujemy $V_{\mathcal{G}} = 0$. W szczególności $V_{\mathcal{F}|q} = V_q = P_\gamma(v) \in T_q\mathcal{F}$, co należało dowieść.

Powyższy argument dowodzi, że układy cięć $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}), (\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}})$ rozpinają $T\mathcal{F}, T\mathcal{G}$ odpowiednio. Dzięki temu układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełnia

$T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$. Mając na uwadze fakt, że reper współrzędnościowy jest równoległy, bezpośrednio rachunkiem docieramy do równości

$$0 = \beta(\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}) = \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta(\frac{\partial}{\partial x_j})) = \sum_k \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\beta}_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}) = (\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\beta}_{kj}) \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (4.1.54)$$

Innymi słowy, macierz $\hat{\beta}$ nie zależy od zmiennych x_i dla $i = 1, 2, \dots, 2n$. Powtarzając podobny rachunek dla α oraz $\frac{\partial}{\partial y_j}$ otrzymujemy, że macierz $\hat{\alpha}$ nie zależy od zmiennej y dla $j = 1, 2, \dots, 2n$, co kończy dowód jednej z implikacji lematu.

Aby wykazać implikację przeciwną, wykorzystajmy Lemat 4.9 z macierzami $h(y), l(x)$ równymi macierzom jednostkowym by uzyskać płaskość koneksji ∇ , a następnie obliczymy jej torsję w układzie współrzędnych danym w tezie lematu. W tym celu zauważmy, że $\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = 0$ dla wszystkich $i, j = 1, 2, \dots, n$. Istotnie, zgodnie z naszym założeniem mamy $\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\beta} = 0$. Stąd otrzymujemy

$$\beta(\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}) = \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta(\frac{\partial}{\partial x_j})) = \sum_k \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\beta}_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}) = (\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\beta}_{kj}) \frac{\partial}{\partial y_k} = 0. \quad (4.1.55)$$

Dowód równości $\nabla \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = 0$ przebiega analogicznie. Dostajemy w ten sposób

$$T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0 \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4.1.56)$$

Podobnie dowodzimy $T(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = 0$ dla $i, j = 1, 2, \dots, 2n$, co wraz z własnością (c) \mathcal{W} -koneksji ze Stwierdzenia 4.2 kończy dowód. \square

4.2 Postać normalna płaskiej 2-tkaniny symplektycznej kowymiaru $(2, 2)$

W tym podrozdziale zbadamy kielki 2-tkanin symplektycznych $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kowymiaru $(2n, 2n)$ znajdujących się w położeniu ogólnym względem formy symplektycznej ω na \mathbb{R}^{4n} , których \mathcal{W} -koneksja jest płaska i beztorsyjna. Skupimy się tu głównie na najprostszym nietrywialnym przypadku $n = 1$. W układzie współrzędnych (x_1, x_2, y_1, y_2) spełniającym $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$ macierz formy symplektycznej ω można zapisać jako

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & A \\ -A^T & \omega_y \end{bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \begin{array}{l} \omega_x = f(x, y) \cdot J, \\ \omega_y = g(x, y) \cdot J, \end{array} \quad \text{oraz} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.1)$$

dla pewnych kielków w zerze nieznikających funkcji gładkich $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Ogólna postać macierzy $A \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \text{GL}(2n, \mathbb{R}))$ to

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Zgodnie ze wzorem (4.1.20) macierze $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ rzutów α, β danych przez (4.1.3) to

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \omega_x^{-1} A = \frac{1}{f} \cdot (-JA), & \hat{\alpha} &= \frac{1}{f(x, y)} \begin{bmatrix} -a_{21}(x, y) & -a_{22}(x, y) \\ a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \end{bmatrix}, \\ \hat{\beta} &= -\omega_y^{-1} A^T = \frac{1}{g} \cdot (JA^T), & \hat{\beta} &= \frac{1}{g(x, y)} \begin{bmatrix} a_{12}(x, y) & a_{22}(x, y) \\ -a_{11}(x, y) & -a_{21}(x, y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

W przypadku, gdy krzywizna i torsja \mathcal{W} -koneksji ∇ znikają, poprzez odpowiednią zamianę współrzędnych możemy sprowadzić formę symplektyczną

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, y) dx_1 \wedge dx_2 + g(x, y) dy_1 \wedge dy_2 + a_{11}(x, y) dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + a_{12}(x, y) dx_1 \wedge dy_2 + a_{21}(x, y) dx_2 \wedge dy_1 + a_{22}(x, y) dx_2 \wedge dy_2 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

do prostej postaci normalnej.

Twierdzenie 4.11. *Niech $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ będzie kielkiem 2-tkaniny symplektycznej znajdującej się w położeniu ogólnym względem formy symplektycznej ω na \mathbb{R}^4 o \mathcal{W} -koneksji ∇ . Koneksja ∇ jest płaska i beztorsyjna wtedy i tylko wtedy, gdy w pewnym układzie współrzędnych (x_1, x_2, y_1, y_2) spełniającym $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$ forma symplektyczna ω przyjmuje postać*

$$\omega = \tilde{f}(x) dx_1 \wedge dx_2 + \tilde{g}(y) dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + \lambda_0 dx_2 \wedge dy_2 \quad (4.2.5)$$

dla pewnych kielków w zerze funkcji gładkich $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ spełniających $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 1$ oraz pewnej stałej rzeczywistej $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Dowód. Załóżmy, że ∇ jest płaska i beztorsyjna. Z Lematu 4.10 można dobrać układ współrzędnych (x_1, x_2, y_1, y_2) spełniający $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$ taki, że macierze $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$ zależą tylko od zmiennych $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$ odpowiednio. Z założenia o położeniu ogólnym tkaniny \mathcal{W} względem formy ω wiemy, że macierz A jest odwracalna, a zatem jeden z jej współczynników jest niezerowy. Permutując

w razie potrzeby współrzędne możemy przyjąć, że $a_{11} \neq 0$. Wstawiając $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(x)$ oraz $\hat{\beta} = \hat{\beta}(y)$ do wzorów (4.2.3) otrzymujemy, że dla wszystkich $i, j = 1, 2$ mamy jednocześnie

$$\begin{aligned} \frac{a_{ij}(x, y)}{a_{11}(x, y)} &= (-1)^i \frac{\hat{\alpha}_{\tau(i)j}(x)}{\hat{\alpha}_{21}(x)} = b_{ij}(x) \quad \text{oraz} \\ \frac{a_{ij}(x, y)}{a_{11}(x, y)} &= (-1)^i \frac{\hat{\beta}_{\tau(j)i}(y)}{\hat{\beta}_{21}(y)} = b'_{ij}(y) \quad \text{dla } b_{ij}, b'_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, 0), \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

gdzie $\tau = (12) \in S_2$ jest transpozycją dwóch indeksów. Łącznie sprawia to, że $A = h(x, y) \cdot C$ dla pewnej stałej macierzy $C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ oraz kielka nieznikającej funkcji gładkiej $h = a_{11} \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Podstawiając to wyrażenie do wzorów (4.2.3) na $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ uzyskamy, że funkcje $\tilde{f}(x) = f/h$ oraz $\tilde{g}(y) = g/h$ zależą tylko od pojedynczych zestawów zmiennych.

Zwróćmy teraz uwagę na wyrażenie (4.2.4) określające postać ogólną formy symplektycznej ω . Wyłączmy czynnik $h(x, y)$ z prawej strony równości, by otrzymać $\omega = h(x, y) \omega_0$ dla formy ω_0 równej

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \tilde{f}(x) dx_1 \wedge dx_2 + \tilde{g}(y) dy_1 \wedge dy_2 + c_{11} dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + c_{12} dx_1 \wedge dy_2 + c_{21} dx_2 \wedge dy_1 + c_{22} dx_2 \wedge dy_2. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Zauważmy, że $d\omega_0 = 0$. Mamy stąd równość

$$0 = d\omega = d(h(x, y) \omega_0) = dh \wedge \omega_0 = \left(\frac{dh}{h}\right) \wedge \omega. \quad (4.2.8)$$

Uogólniony lemat Cartana [1, Lemma 1] mówi w tym wypadku, że jeżeli tylko 1-forma $d_p h$ jest niezerowa w dowolnym punkcie p , to istnieje pewna 1-forma $\eta \in T_p^* \mathbb{R}^4$ spełniająca $\omega_p = \left(\frac{d_p h}{h}\right) \wedge \eta_p$. Stąd wynikłoby, że $\omega_p^2 = 0$, co stoi w sprzeczności z tym, że ω jest formą symplektyczną. Sprzeczność ta dowodzi, że $d_p h = 0$ w każdym punkcie p pewnego otoczenia zera, a więc że $h(x, y)$ jest kielkiem funkcji stałej. Modyfikując układ współrzędnych poprzez odpowiednio dobrane odwzorowanie $(x, y) \mapsto (sx, ty)$ dla $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ możemy sprawić, by $h(x, y) = 1$, $\tilde{f}(0) = 1$ oraz $\tilde{g}(0) = 1$.

Ponieważ macierz $A = C$ jest nieosobliwa, można w razie konieczności dokonać obrotów

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_2, -x_1, y_1, y_2), \quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2, y_2, -y_1), \quad (4.2.9)$$

o kąt $\pi/2$ płaszczyzn $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^2\}$ oraz $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}^2\}$ w taki sposób, by w nowym układzie współrzędnych współczynnik c_{11} był niezerowy. Następnie kładąc

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 - \frac{c_{21}}{c_{11}} X_2, & y_1 &= Y_1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} Y_2, \\ x_2 &= X_2, & y_2 &= Y_2, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

sprowadzamy formę ω do postaci

$$\begin{aligned}\omega &= \tilde{f}(X) dX_1 \wedge dX_2 + \tilde{g}(Y) dY_1 \wedge dY_2 \\ &\quad + c_{11} dX_1 \wedge dY_1 + \left(c_{22} - \frac{c_{12} \cdot c_{21}}{c_{11}} \right) dX_2 \wedge dY_2.\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

Przy pomocy ostatniego podstawienia $\tilde{x}_1 = c_{11}X_1$, $\tilde{x}_2 = c_{11}^{-1}X_2$ oraz $\tilde{y}_i = Y_i$ dla $i = 1, 2$ uzyskujemy ostatecznie postać normalną

$$\omega = \tilde{f}(\tilde{x}) d\tilde{x}_1 \wedge d\tilde{x}_2 + \tilde{g}(\tilde{y}) d\tilde{y}_1 \wedge d\tilde{y}_2 + d\tilde{x}_1 \wedge d\tilde{y}_1 + (\det C) d\tilde{x}_2 \wedge d\tilde{y}_2\tag{4.2.12}$$

zgodną z (4.2.5) dla $\lambda_0 = \det C$. Zauważmy, że z warunku położenia ogólnego tkaniny względem formy ω mamy $\det C \neq 0$. Ponadto mamy $\det C \neq 1$. W przeciwnym wypadku

$$\begin{aligned}\omega|_0 &= dx_1 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 \\ &= (dx_1 + dy_1) \wedge (dx_2 + dy_2),\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

co przeczyłoby niezdegenerowaniu formy symplektycznej ω .

W drugą stronę, jeżeli kieltek w zerze 2-formy ω przyjmuje postać (4.2.5) we współrzędnych (x_1, x_2, y_1, y_2) spełniających $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$, to jest on kielkiem formy symplektycznej. Istotnie, w takim wypadku

$$\begin{aligned}\omega|_0^2 &= (\tilde{f}(0)\tilde{g}(0) - \lambda_0) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \\ &= (1 - \lambda_0) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0,\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

a więc forma ω jest niezdegenerowana w otoczeniu 0. Co więcej $d\omega = 0$, co pokazujemy przykładając różniczkę zewnętrzną d do wzoru (4.2.5). Ponieważ $\det C \neq 0$, tkanina \mathcal{W} znajduje się w położeniu ogólnym względem formy ω . Rzuty α, β określone w (4.1.3) są zatem izomorfizmami. Zgodnie ze wzorem (4.1.20) macierze rzutów α, β wynoszą $\hat{\alpha} = -\tilde{f}(x)^{-1}JC$ oraz $\hat{\beta} = \tilde{g}(y)^{-1}JC^T$, a więc zależą od zmiennych x_1, x_2 oraz y_1, y_2 odpowiednio. Z Lematu 4.10 koneksja ∇ jest płaska i beztorsyjna. \square

Postać normalna (4.2.5) uzyskana w powyższym twierdzeniu jest podobna do postaci normalnej

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + \lambda dx_2 \wedge dy_2\tag{4.2.15}$$

formy symplektycznej na \mathbb{R}^4 w otoczeniu dwóch *podrozmaitości* symplektycznych S_1, S_2 wymiaru 2 przecinających się w punkcie p , obliczonej przez W. Domitrza, S. Janeczko oraz M. Zhitomirskiego w [17]. Liczba λ występująca w tej postaci normalnej to tzw. *liczba charakterystyczna* trójki zlinearyzowanej $(\mathbb{R}^4, \omega, T_p S_1 \cup T_p S_2)$.

W nieco większej ogólności, liczby charakterystyczne trójki $(\mathbb{R}^{4n}, \omega, T_p S_1 \cup T_p S_2)$ dla dwóch podrozmaitości symplektycznych wymiaru $2n$ przecinających się transversalnie definiuje się jako wartości własne endomorfizmu $\alpha \circ \beta$ wiązki stycznej $T_p S_1$ będącego złożeniem dwóch rzutowań

$$\begin{aligned}\alpha : T_p S_2 &\rightarrow T_p \mathbb{R}^{4n} = T_p S_1 \oplus T_p S_1^\omega \rightarrow T_p S_1, \\ \beta : T_p S_1 &\rightarrow T_p \mathbb{R}^{4n} = T_p S_2 \oplus T_p S_2^\omega \rightarrow T_p S_2,\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

określonych podobnie jak we wzorze (4.1.3). Powyższa konstrukcja pokazuje, że zbiór tych wartości własnych jest niezmiennikiem trójki zlinearyzowanej. Każda z nich jest zawsze parzystej krotności geometrycznej, co wynika z następującej własnością formy ω_p : dla $v, w \in T_p S_1$ z definicji (4.2.16) rzutów α, β zachodzi

$$\omega_p(\alpha \circ \beta(v), w) = \omega_p(\beta(v), w) = \omega_p(\beta(v), \beta(w)) = \beta^*(\omega_{|T_p S_2})(v, w).\tag{4.2.17}$$

Oznacza to, że dla wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$ własność $v \in \ker(\alpha \circ \beta - \lambda \text{id}_{T_p S_1})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $v \in \ker(\beta^*(\omega_{|T_p S_2}) - \lambda \omega_{|T_p S_1})$. Twierdzenie o postaci normalnej 2-form [10, Chapter 1, Theorem 1.7] pokazuje zatem, że jądro powyższej 2-formy jest zawsze parzystego wymiaru. W przypadku podrozmaitości wymiaru 2 endomorfizm $\alpha \circ \beta$ posiada wartość własną, której krotność geometryczna, z racji jej parzystości, wynosi dokładnie 2. Oznacza to, że $\alpha \circ \beta = \lambda \text{id}_{T_p S_1}$ dla pewnej liczby rzeczywistej λ .

W rozpatrywanym przez nas przypadku, gdzie rolę $T_p S_i$ dla $i = 1, 2$ pełnią przestrzenie styczne $T_p \mathcal{F}, T_p \mathcal{G}$ do liści foliacji tkaniny symplektycznej $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$, powyższa obserwacja odzwierciedla się w równości

$$\hat{\alpha} \hat{\beta} = \left(\frac{1}{fg} \right) \cdot (-JAJA^T) = \left(\frac{\det A}{fg} \right) \cdot I\tag{4.2.18}$$

dotyczącej iloczynu macierzy rzutów $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ danych we wzorze (4.2.3). Liczba charakterystyczna zależy tu od wyboru punktu $p \in \mathbb{R}^4$ leżącego w otoczeniu zera i wynosi ona $\lambda = \frac{\det A}{fg}$. Gdy \mathcal{W} -koneksja ∇ tkaniny \mathcal{W} jest płaska i beztorsyjna, przedstawiając formę symplektyczną w postaci normalnej (4.2.5) z Twierdzenia 4.11 otrzymujemy $\lambda = \frac{\lambda_0}{\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)}$. Funkcja ta zapisuje się jako iloczyn dwóch funkcji zależących jedynie od współrzędnych x_1, x_2 oraz y_1, y_2 odpowiednio. Ze względu na $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 1$ występująca tu liczba λ_0 jest dokładnie liczbą charakterystyczną trójki zlinearyzowanej $(\mathbb{R}^4, \omega, T_0 \mathcal{F} \cup T_0 \mathcal{G})$.

Twierdzenie 4.12. *Niech dany będzie kietek w 0 formy symplektycznej ω na \mathbb{R}^4 postaci*

$$\omega = \tilde{f}(x) dx_1 \wedge dx_2 + \tilde{g}(y) dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + \lambda_0 dx_2 \wedge dy_2\tag{4.2.19}$$

dla pewnych kielków w zerze funkcji gładkich $\check{f}, \check{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ o własności $\check{f}(0) = \check{g}(0) = 1$ oraz dla pewnej ustalonej liczby rzeczywistej $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Określmy na \mathbb{R}^4 tkaninę symplektyczną $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$, której foliacje zadane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F} = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G} = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$. Kieltek dyfeomorfizmu $\varphi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ spełnia $d\varphi(T\mathcal{F}) \subseteq T\mathcal{F}$, $d\varphi(T\mathcal{G}) \subseteq T\mathcal{G}$ oraz $\varphi^*\omega = \tilde{\omega}$ dla pewnej innej formy symplektycznej

$$\tilde{\omega} = \check{f}(x) dx_1 \wedge dx_2 + \check{g}(y) dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + \lambda_0 dx_2 \wedge dy_2, \quad (4.2.20)$$

gdzie kielki w zerze funkcji gładkich $\check{f}, \check{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ spełniają $\check{f}(0) = \check{g}(0) = 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest on postaci

$$\varphi(x, y) = (X(x), Y(y)) \quad (4.2.21)$$

dla pewnych odwzorowań liniowych $X, Y \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ spełniających

$$\begin{aligned} \det X = 1, \\ \det Y = 1, \end{aligned} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \cdot Y. \quad (4.2.22)$$

Dowód. Kieltek dyfeomorfizmu φ spełnia $d\varphi(T\mathcal{F}) \subseteq T\mathcal{F}$ oraz $d\varphi(T\mathcal{G}) \subseteq T\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zapisuje się jako $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ dla pewnych kielków dyfeomorfizmów $\varphi_i : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $i = 1, 2$. W obliczu tej własności cofnięcie $\varphi^*\omega_2$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega = \check{f}(\varphi_1(x)) \cdot \det d\varphi_1(x) dx_1 \wedge dx_2 + \check{g}(\varphi_2(y)) \cdot \det d\varphi_2(y) dy_1 \wedge dy_2 \\ + c_{11} dx_1 \wedge dy_1 + c_{12} dx_1 \wedge dy_2 + c_{21} dx_2 \wedge dy_1 + c_{22} dx_2 \wedge dy_2 \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

dla macierzy

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = d\varphi_1(x)^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \cdot d\varphi_2(y), \quad (4.2.24)$$

gdzie symbolami $d\varphi_i$ dla $i = 1, 2$ oznaczamy macierze Jacobiego odpowiednich odwzorowań. Stąd warunek $\varphi^*\omega = \tilde{\omega}$ pociąga za sobą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = d\varphi_1(x)^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \cdot d\varphi_2(y). \quad (4.2.25)$$

Ponieważ wszystkie trzy czynniki po prawej stronie równości są macierzami nieosobliwymi, przyjmując np. $x = 0$ otrzymujemy natychmiast, że macierz $d\varphi_2(y)$ jest stała. Podobnie uzyskujemy stałość $d\varphi_1(x)$. Różniczka odwzorowania $\varphi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ jest stała, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest odwzorowaniem liniowym. Kładąc zatem

$X = d\varphi_1(0)$ oraz $Y = d\varphi_2(0)$, z równości $\varphi^*\omega_{2|0} = \omega_{1|0}$ oraz $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = \tilde{g}_1(0) = \tilde{g}_2(0) = 1$ otrzymujemy $\det X = \det Y = 1$, co finalnie dowodzi tezy twierdzenia o postaci odwzorowania φ .

W drugą stronę, jeżeli $\varphi(x, y) = (X(x), Y(y))$ jest odwzorowaniem liniowym spełniającym (4.2.22), forma $\varphi^*\omega$ istotnie jest postaci

$$\varphi^*\omega = \tilde{f}(X(x)) dx_1 \wedge dx_2 + \tilde{g}(Y(y)) dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 + \lambda_0 dx_2 \wedge dy_2. \quad (4.2.26)$$

Kładąc $\check{f} = \tilde{f} \circ X$ oraz $\check{g} = \tilde{g} \circ Y$ otrzymujemy drugą część tezy. \square

Wniosek 4.13. *Zagadnienie klasyfikacji kielków w zerze 2-tkanin symplektycznych kowymiary (2, 2) znajdujących się w położeniu ogólnym względem standardowej formy symplektycznej $\sigma = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ na \mathbb{R}^4 o płaskiej i beztorsyjnej \mathcal{W} -koneksji ∇ oraz ustalonej liczbie charakterystycznej w zerze równej $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ względem działania grupy kielków symplektomorfizmów redukuje się do zagadnienia klasyfikacji par kielków w zerze funkcji gładkich $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ względem działania grupy $SL(2, \mathbb{R})$ określonego wzorem*

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) \cdot A = (\tilde{f} \circ A, \tilde{g} \circ A_{\lambda_0}), \quad (4.2.27)$$

gdzie $A \in SL(2, \mathbb{R})$ oraz

$$A_{\lambda_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0^{-1} \end{bmatrix} \cdot A^{-T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -\lambda_0 a_{21} \\ -\lambda_0^{-1} a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (4.2.28)$$

Dowód. Odpowiedniość zadająca równoważność zagadnień przyporządkowuje klasie równoważności kielka 2-tkaniny symplektycznej $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ orbitę pary kielków funkcji (\tilde{f}, \tilde{g}) występujących w postaci normalnej 4.2.5 formy symplektycznej Twierdzenia 4.11 względem działania $SL(2, \mathbb{R})$. Dwóm symplektomorficznym tkaninom $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)$ oraz $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)$ odpowiadają postaci normalne związane symplektomorfizmem $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ przekształcającym $T\mathcal{F}_1 = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ w $T\mathcal{F}_2 = \ker dY_1 \cap \ker dY_2$ oraz $T\mathcal{G}_1 = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$ w $T\mathcal{G}_2 = \ker dX_1 \cap \ker dX_2$. Zgodnie z Twierdzeniem 4.12 takie symplektomorfizmy mają postać odwzorowań liniowych $\varphi(x, y) = (Ax, A_{\lambda_0}y)$ dla macierzy $A \in SL(2, \mathbb{R})$ oraz A_{λ_0} określonej wzorem (4.2.28).

Jeżeli z kolei dane są dwie pary (\tilde{f}, \tilde{g}) oraz (\check{f}, \check{g}) spełniające $(\check{f}, \check{g}) = (\tilde{f}, \tilde{g}) \cdot A$ dla pewnego $A \in SL(2, \mathbb{R})$, to z Lematu 4.12 kielk odwzorowania $\varphi(x, y) = (Ax, A_{\lambda_0}y)$ w zerze zadaje symplektomorfizm wiążący dwie formy symplektyczne $\omega, \tilde{\omega}$ na \mathbb{R}^4 dane wzorami

(4.2.19) oraz (4.2.22). Stosując twierdzenie Darboux [46, Theorem 8.1] o postaci kanonicznej formy symplektycznej do ω oraz do $\tilde{\omega}$ otrzymujemy kielki w zerze dyfeomorfizmów $\psi, \tilde{\psi}$ przestrzeni \mathbb{R}^4 takie, że $\psi^*\sigma = \omega$ oraz $\tilde{\psi}^*\sigma = \tilde{\omega}$. Obrazy liści foliacji $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ generowanych przez $T\mathcal{F}_0 = \ker dy_1 \cap \ker dy_2$ oraz $T\mathcal{G}_0 = \ker dx_1 \cap \ker dx_2$ względem odwzorowań $\psi, \tilde{\psi}$ składają się na kielki 2-tkanin symplektycznych $\mathcal{W}, \tilde{\mathcal{W}}$ w położeniu ogólnym względem formy σ na \mathbb{R}^4 . Kieltek odwzorowania $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ jest symplektomorfizmem (\mathbb{R}^4, σ) będącym jednocześnie równoważnością tkanin \mathcal{W} oraz $\tilde{\mathcal{W}}$, co kończy dowód równoważności zagadnień. \square

Uwaga. W powyższym wniosku nie tracimy ogólności rozpatrując jedynie zagadnienie klasyfikacyjne na rozmaidłości symplektycznej (\mathbb{R}^4, σ) dla formy standardowej $\sigma = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$, gdyż analogiczne zagadnienie na ogólnej rozmaidłości symplektycznej (M, ω) jest równoważne powyższemu za sprawą twierdzenia Darboux o lokalnej postaci kanonicznej formy symplektycznej.

Analogiczne zagadnienie klasyfikacyjne kielków tkanin symplektycznych o płaskich i beztorsyjnych \mathcal{W} -koneksjach w wyższych wymiarach jest znacznie trudniejsze niż w kowymiarze $(2, 2)$. Przestrzeń modułów takich tkanin jest w tym przypadku istotnie większa niż sugeruje twierdzenie o postaciach normalnych kielków generycznych przecięć podrozmaidłości symplektycznych kowymiaru $(2n, 2n)$ [17, (4.5)]. Mówi ono, że w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych prostującym obie podrozmaidłości forma symplektyczna tła wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} + \sum_{j=1}^n dy_{2i-1} \wedge dy_{2i} \\ &+ \sum_{k=1}^n dx_{2i-1} \wedge dy_{2i-1} + \sum_{k=1}^n \lambda_i dx_{2i} \wedge dy_{2i} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

dla parami różnych liczb charakterystycznych λ_i trójki zlinearyzowanej $(\mathbb{R}^{4n}, \omega, T_p S_1 \cup T_p S_2)$. Naiwne uogólnienie postaci normalnej formy ω zawartej w Twierdzeniu 4.11 na przypadek $(2n, 2n)$ -kowymiarowy w zgodzie ze wzorem (4.2.5) w kowymiarze $(2, 2)$ mogłaby brzmieć następująco: gdy ∇ jest płaska i beztorsyjna, istnieje układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ spełniający $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{2n} \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{2n} \ker dx_j$ taki, że

dla pewnych kielków w zerze funkcji gładkich $\tilde{f}_i, \tilde{g}_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, zachodzi

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(x_{2i-1}, x_{2i}) dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} + \sum_{j=1}^n \tilde{g}_j(y_{2j-1}, y_{2j}) dy_{2j-1} \wedge dy_{2j} \\ &+ \sum_{k=1}^n dx_{2k-1} \wedge dy_{2k-1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k dx_{2k} \wedge dy_{2k}. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Tak sformułowane stwierdzenie nie jest jednak prawdziwe. Dla tak określonej formy ω_0 złożenie $\alpha_0 \circ \beta_0$ rzutowań α_0, β_0 charakteryzuje się pewną własnością, która nie przysługuje wszystkim formom symplektycznym, dla których koneksja ∇ jest płaska i beztorsyjna. Przyjrzyjmy się bliżej temu złożeniu.

Zapiszmy macierz 2-formy ω_0 we współrzędnych $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$ jako

$$\hat{\omega}_0 = \begin{bmatrix} \omega_x & A \\ -A^T & \omega_y \end{bmatrix}. \quad (4.2.31)$$

Rzut oka na równość (4.2.30) definiującą formę ω_0 pozwala sprawdzić, że

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(1, \lambda_1, \dots, 1, \lambda_n), \\ \omega_x &= F \cdot J = J \cdot F, & F &= \text{diag}(\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_n(x), \tilde{f}_n(x)), \\ \omega_y &= G \cdot J = J \cdot G, & G &= \text{diag}(\tilde{g}_1(y), \tilde{g}_1(y), \dots, \tilde{g}_n(y), \tilde{g}_n(y)), \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

gdzie J jest macierzą standardowej formy symplektycznej

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \end{bmatrix} \quad (4.2.33)$$

Macierze $\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0$ rzutowań α_0, β_0 oblicza się zgodnie ze wzorem (4.1.20).

$$\hat{\alpha}_0 = \omega_x^{-1} A = -F^{-1} J A, \quad (4.2.34)$$

$$\hat{\beta}_0 = -\omega_y^{-1} A^T = G^{-1} J A, \quad (4.2.35)$$

$$\hat{\alpha}_0 \hat{\beta}_0 = -\omega_x^{-1} A \omega_y^{-1} A = -F^{-1} G^{-1} J A J A. \quad (4.2.36)$$

W ostatniej równości wykorzystaliśmy przemienność F, G z macierzą J oraz z innymi macierzami diagonalnymi. Struktura blokowa macierzy F, G, J oraz A pozwala uprościć

niewielkie dalsze obliczenia. Pojedynczy, i -ty blok wymiaru 2×2 na głównej przekątnej iloczynu $-JAJA$ to

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (4.2.37)$$

Ponieważ bloki znajdujące się poza główną przekątną są zerowe, macierz $\hat{\alpha}_0 \hat{\beta}_0$ jest macierzą diagonalną o podwójnych wartościach własnych $\frac{\lambda_i}{f_i(x)\tilde{g}_i(x)}$ dla $i = 1, \dots, n$.

Przestrzenie własne rozpatrywanego endomorfizmu $\alpha_0 \circ \beta_0$ tworzą podwiązki wektorowe $E_i \hookrightarrow T\mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ rozpięte przez pola reperu współrzędnościowego $(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{2i}})$. Wszystkie te dystrybucje styczne są całkowalne. To właśnie ta cecha całkowalności dystrybucji własnych E_i wyróżnia formy symplektyczne postaci (4.2.30). W ogólności nie wszystkie formy symplektyczne ω , dla których \mathcal{W} -koneksja tkaniny symplektycznej \mathcal{W} jest płaska i beztorsyjna, indukują całkowalne dystrybucje własne E_i , a zatem nie wszystkie takie formy daje się sprowadzić do takiej postaci normalnej przy pomocy dyfeomorfizmu zachowującego foliację tkaniny.

Przykład 4.2. Dla prostoty będziemy pracować w \mathbb{R}^8 – poniższy przykład z powodzeniem uogólnia się na wyższe wymiary. Niech $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ będą dowolnymi funkcjami gładkimi nieznikającymi w zerze. Zdefiniujemy 2-formę ω wzorem

$$\begin{aligned} \omega &= dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dy_1 \wedge dy_2 + dy_3 \wedge dy_4 \\ &+ dx_1 \wedge dy_1 + \eta_1(x_2) dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3 + \eta_2(x_4) dx_4 \wedge dy_4 \\ &+ dx_1 \wedge dy_3 - dx_3 \wedge dy_1. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Powyższa forma jest zamknięta i niezdegenerowana, co potwierdza bezpośredni rachunek. Co więcej, tkanina $\mathcal{W} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$, której foliacje generowane są przez dystrybucje styczne $T\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^4 \ker dy_i$ oraz $T\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^4 \ker dx_j$, jest symplektyczna oraz znajduje się w położeniu ogólnym względem ω . Zbadajmy zatem rzutowania α, β określone w oparciu o rozkład $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G}$ wzorem (4.1.3). Ich macierze we współrzędnych można obliczyć korzystając ze wzoru (4.1.20). Prowadzi on do

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -\eta_1(x_2) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_2(x_4) \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \eta_1(x_2) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2(x_4) \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.39)$$

Korzystając z Lematu 4.9 wnioskujemy, że \mathcal{W} -koneksja ∇ tkaniny \mathcal{W} jest płaska. Beztorsyjność ∇ wynika z następującego rozumowania. Równość

$$\beta T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} \beta \frac{\partial}{\partial x_i} = (\partial_{x_i} \hat{\beta}_{jk} - \partial_{x_j} \hat{\beta}_{ik}) \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad (4.2.40)$$

dla $i, j = 1, 2, 3, 4$ oraz odwracalność β dowodzą, że warunkiem wystarczającym na znikanie torsji wzdłuż $T\mathcal{F}$ jest to, by 1-formy $\xi_i = \sum_{k=1}^4 \hat{\beta}_{ik} dx_k \in \Gamma(T\mathcal{F})$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ skonstruowane z rzędów macierzy $\hat{\beta}$ były zamknięte na liściach foliacji \mathcal{F} . Nietrudno to dowieść bezpośrednim rachunkiem. W podobny sposób dowodzimy, że $T\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0$ co w połączeniu z własnością (c) \mathcal{W} -koneksji ∇ ze Stwierdzenia 4.2 dowodzi beztorsyjności ∇ .

Zbadajmy teraz dystrybucje własne endomorfizmu $\alpha \circ \beta$ wiązki $T\mathcal{F}$. Ze względu na parzystość krotności geometrycznych jego wartości własnych, w przypadku generycznym uzyskamy dwie dystrybucje własne E_+ oraz E_- odpowiadające wartościom własnym λ_+ , λ_- . Nieco uciążliwe obliczenia prowadzą do

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\eta_1 + \eta_2 \pm \sqrt{(\eta_1 - \eta_2)^2 - 4\eta_1\eta_2} \right). \quad (4.2.41)$$

Uzyskane wartości własne są od siebie różne wtedy i tylko wtedy, gdy $(\eta_1 - \eta_2)^2 \neq 4\eta_1\eta_2$. Ponadto mogą one przyjmować wartości zespolone dla niektórych funkcji η_1, η_2 . W przypadku $\eta_1 \neq \eta_2$ obie dystrybucje własne E_{\pm} rozpięte są przez pary pól wektorowych v_1^{\pm}, v_2^{\pm} postaci

$$\begin{aligned} v_1^{\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_1} + (1 - \lambda_{\pm}/\eta_1) \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ v_2^{\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_2} + (1 - \lambda_{\pm}/\eta_2) \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

Pokażemy teraz, że $[v_1^+, v_2^+] \notin E_+$ dla odpowiednio dobranych funkcji η_1, η_2 . Ponieważ

$$[v_2^+, v_1^+] = (\partial_{x_2}(1 - \lambda_+/\eta_1) + (1 - \lambda_+/\eta_2)\partial_{x_4}(1 - \lambda_+/\eta_1)) \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (4.2.43)$$

jest proporcjonalny do $\frac{\partial}{\partial x_3}$, wystarczy wykazać, że współczynnik przy $\frac{\partial}{\partial x_3}$ w uzyskanym powyżej wyniku jest niezerowy. Wyrażenie to upraszcza się znacznie, gdy przyjmiemy, że η_1 jest funkcją stałą, równą na przykład -1 . Pamiętając o tym, że $\eta_4 = \eta_4(x_4)$, współczynnik ten redukuje wtedy się do

$$[v_2^+, v_1^+] = (1 - \lambda_+/\eta_2) \cdot (\partial_{x_4} \lambda_+) \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (4.2.44)$$

Biorąc na przykład $\eta_2(x_4) = 1 + x_4$ otrzymujemy $\partial_{x_4} \lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{x_4+4}{(x_4^2+8x_4+8)^{1/2}}$, dzięki czemu wartość nawiasu Liego w zerze wynosi

$$[v_2^+, v_1^+] = (1 - \sqrt{2})\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} \notin E_+. \quad (4.2.45)$$

Dla tak dobranych funkcji η_1, η_2 dystrybucja własna E_+ nie jest inwolutywna, a więc nie jest też całkowalna.

Każdy symplektomorfizm φ spełniający $d\varphi(T\mathcal{F}) \subseteq T\mathcal{F}$, $d\varphi(T\mathcal{G}) \subseteq T\mathcal{G}$ oraz $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ przeprowadza również dopełnienia skośnie-ortogonalne względem formy ω_1 w dopełnienia skośnie-ortogonalne obrazu względem formy ω_2 . W szczególności mamy $d\varphi(T\mathcal{F}^{\omega_1}) \subseteq T\mathcal{F}^{\omega_2}$, $d\varphi(T\mathcal{G}^{\omega_1}) \subseteq T\mathcal{G}^{\omega_2}$, a więc jeżeli oznaczymy odpowiedniki rzutowań α, β względem form ω_1, ω_2 symbolami α_1, β_1 oraz α_2, β_2 odpowiednio, to zachodzi przemienność $d\varphi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$ oraz $d\varphi \circ \beta_1 = \beta_2 \circ \varphi$. Stąd mamy również $d\varphi \circ (\alpha_1 \circ \beta_1) = (\alpha_2 \circ \beta_2) \circ d\varphi$, co sprawia, że $d\varphi$ przenosi dystrybucje własne endomorfizmu $\alpha_1 \circ \beta_1$ na dystrybucje własne $\alpha_2 \circ \beta_2$. Ze wzoru $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y]$ dla $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{4n})$ dystrybucje własne odwzorowania $\alpha_1 \circ \beta_1$ są całkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy całkowalne są dystrybucje własne endomorfizmu $\alpha_2 \circ \beta_2$.

Biorąc pod uwagę całkowalność dystrybucji własnych złożenia rzutowań $\alpha_0 \circ \beta_0$ stwarzyszonych z formą symplektyczną ω_0 daną we wzorze (4.2.30) dla $n = 2$ oraz brak całkowalności E_+ widzimy, że powyższej formy ω nie da się sprowadzić do postaci normalnej (4.2.30) przy pomocy dyfeomorfizmów zachowujących foliacje \mathcal{F} oraz \mathcal{G} *pomimo trywialności \mathcal{W} -koneksji ∇* .

Pytanie: czy da się wskazać prostą postać normalną formy symplektycznej ω , która indukuje na współrzędnościowej 2-tkaninie symplektycznej określonej na $(\mathbb{R}^{4n}, \omega)$ płaską i beztorsyjną \mathcal{W} -koneksję pozostaje w chwili pisania tej rozprawy zagadnieniem otwartym.

Bibliografia

- [1] Y. Agaoka. “On a Generalization of Cartan’s Lemma”. *Journal of Algebra* 127 (1989), pp. 470–507.
- [2] M. A. Akivis and V. V. Goldberg. “Differential Geometry of Webs”. *Handbook of Differential Geometry*. Ed. by F. J. Dillen and L. C. Verstraelen. Vol. 1. Handbook of Differential Geometry. North-Holland, 2000, pp. 1–152.
- [3] H. Anchiaux and P. Romon. “A canonical structure on the tangent bundle of a pseudo- or para-Kähler manifold”. *Monatshefte für Mathematik* 174 (2014), pp. 329–355.
- [4] N. Andersson and G. L. Comer. “Relativistic Fluid Dynamics: Physics for Many Different Scales”. *Living reviews in relativity* 24.3 (2021).
- [5] N. Andersson et al. “Beyond ideal magnetohydrodynamics: from fibration to $3 + 1$ foliation”. *Classical and Quantum Gravity* 34.12 (2017), p. 125003.
- [6] V. I. Arnold and A. B. Givental. “Symplectic Geometry”. *Dynamical Systems IV. Symplectic Geometry and its Applications*. 2nd. Vol. 4. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer, 2001.
- [7] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner. “Republication of: The dynamics of general relativity”. *General Relativity and Gravitation* 40 (2008), pp. 1997–2027.
- [8] G. Bande and D. Kotschick. “The Geometry of Symplectic Pairs”. *Transactions of the American Mathematical Society* 358.4 (2006), pp. 1643–1655.
- [9] W. Blaschke and G. Bol. *Geometrie der Gewebe*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 49. Berlin: J. Springer, 1938.
- [10] R. Bryant et al. *Exterior Differential Systems*. Mathematical Sciences Research Institute Publications. New York, NY: Springer, 2011.

- [11] M. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Basel, Switzerland: Birkäuser, 1992.
- [12] S. S. Chern. “Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^{2r} ”. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 11 (1935), pp. 333–358.
- [13] S. S. Chern, W. H. Chen, and K. S. Lam. *Lectures On Differential Geometry*. Series on University Mathematics. World Scientific Publishing Co., 2000.
- [14] S.-S. Chern. “Abel’s theorem and webs”. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 80.1-2 (1978), pp. 13–110.
- [15] S.-S. Chern. “Web geometry”. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 6.1 (1982), pp. 1–8.
- [16] V. Cruceanu, P. Fortuny, and P. M. Gaeda. “A survey on paracomplex geometry”. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 26.1 (1996), pp. 83–115.
- [17] W. Domitrz, S. Janeczko, and M. Zhitomirskii. “Generic singularities of symplectic and quasi-symplectic immersions”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 155 (02 2013), pp. 317–329.
- [18] W. Domitrz and M. Zubilewicz. “Local invariants of divergence-free webs”. *Analysis and Mathematical Physics* 13.4 (2022).
- [19] W. Domitrz and M. Zubilewicz. *On webs in symplectic geometry*. w przygotowaniu.
- [20] F. Etayo and R. Santamaria. “The canonical connection of a bi-Lagrangian manifold”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34 (2001), pp. 981–987.
- [21] F. Etayo, R. Santamaría, and U. R. Trías. “The geometry of a bi-Lagrangian manifold”. *Differential Geometry and its Applications* 24.1 (2006), pp. 33–59.
- [22] I. Gelfand, V. Retakh, and M. Shubin. “Fedosov manifolds”. *Advances in Mathematics* 136 (1998), pp. 104–140.
- [23] I. M. Gelfand and I. S. Zakharevich. “Webs, Veronese Curves, and Bihamiltonian Systems”. *Journal of Functional Analysis* 99 (1991), pp. 150–178.
- [24] V. V. Goldberg. *Theory of Multicodimensional $(n + 1)$ -Webs*. Mathematics and its applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [25] É.ourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity. Bases of Numerical Relativity*. Vol. 846. Lecture Notes in Physics. Heidelberg: Springer, 2012.

- [26] V. K. A. M. Gugenheim and D. C. Spencer. “Chain homotopy and the de Rham theory”. *Proceedings of American Mathematical Society* 7 (1956), pp. 144–152.
- [27] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [28] H. Hess. “Connections on symplectic manifolds and geometric quantization”. *Differential geometrical methods in mathematical physics*. Springer, 1980, pp. 153–166.
- [29] T. A. Ivey and J. M. Landsberg. *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. Vol. 61. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2003.
- [30] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. “Resonant geometric optics and webs”. *Web theory and related topics*. World Scientific, 2001, pp. 114–132.
- [31] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 1. New York: Interscience Publishers, 1963.
- [32] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 2. New York: Interscience Publishers, 1969.
- [33] I. Kolář, P. W. Michor, and J. Slovák. *Natural Operators in Differential Geometry*. Heidelberg: Springer, 1993.
- [34] N. Konovenko. “On symplectic invariants of planar 3-webs”. *Proceedings of the International Geometry Center* 15 (2022), pp. 66–74.
- [35] W. Kryński. “Webs and the Plebański equation”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 161.3 (2016), pp. 455–468.
- [36] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd ed. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.
- [37] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. New York, NY: Springer New York, 1997.
- [38] P. G. LeFloch and H. Makhlof. “A Geometry-Preserving Finite Volume Method for Compressible Fluids on Schwarzschild Spacetime”. *Communications in Computational Physics* 15.3 (2014), pp. 827–852.
- [39] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. 2nd. Oxford Graduate Texts in Mathematics 27. New York: Oxford University Press, 1998.

- [40] P. T. Nagy. “Webs and curvature”. *Web theory and related topics*. World Scientific, 2001, pp. 48–91.
- [41] K. Nomizu and T. Sasaki. *Affine Differential Geometry. Geometry of Affine Immersions*. Vol. 111. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1994.
- [42] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry. With Applications to General Relativity*. Pure and Applied Mathematics. New York: Academic Press, 1983.
- [43] A. Panasyuk. “Veronese Webs for Bihamiltonian Structures of Higher Corank”. *Banach Center Publications* 51 (2000), pp. 251–261.
- [44] J. V. Pereira and L. Pirio. *An Invitation to Web Geometry*. Publicações Matemáticas do IMPA, 2009.
- [45] P. Renteln. *Manifolds, Tensors and Forms. An introduction for mathematicians and physicists*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2014.
- [46] A. C. da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Vol. 1764. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2008.
- [47] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 2. Publish or Perish Inc., 1999.
- [48] S. Tabachnikov. “Geometry of Lagrangian and Legendrian 2-web”. *Differential Geometry and its Applications* 3 (1993), pp. 265–284.
- [49] G. Thomsen. “Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche”. *Boll. Un. Mat. ital.* 6 (1927), pp. 80–85.
- [50] I. Vaisman. “Basics of Lagrangian Foliations”. *Publications Matemàtiques* 33 (1989), pp. 559–575.
- [51] I. Vaisman. “Symplectic curvature tensors”. *Monatshefte für Mathematik* 100 (1985), pp. 299–327.